LOGOMETRIA

Auctore

ROGERO COTES,

Trin. Coll. Cantab. Soc.

Astr. & Ph. Exp. Professore PLUMIANO, & R. S. S.

Eruditissimo Viro

EDMUNDO HALLEIO,

Societatis Regalis Secretario S. P.

Mitto tibi, hortatu Illustrissimi Præsidis NEWTONI, *quæ aliquot abhinc annis conscripseram de Rationibus dimetiendis. Tu vero, quum & Ipse dudum in eodem Argumento præclare versatus fueris, pro solito tuo candore, tentamen hoc qualecunque benigne accipies. Vale.*

AGITUR in hoc Tractatu de *Mensuris Rationum.* Hæ Mensuræ sunt quantitates cujuscunque generis, quarum magnitudines magnitudinibus rationum sunt analogæ. In dato itaque Systemate, rationis ejusdem eadem est mensura, duplicatæ dupla, triplicatæ tripla, subduplicatæ subdupla, sesquiplicatæ sesquialtera: denique quocunque modo per compositionem vel resolutionem auctæ vel diminutæ rationis, similiter aucta eſt vel diminuta menſura. Æqualitatis ratio nullam habet magnitudinem, quia nullam addita vel detracta mutationem inducit; rationes quæ dicuntur majoris & minoris inæqualitatis contrarias habent magnitudinum ſuarum affectiones, quoniam in compoſitione & reſolutione contraria ſemper efficiunt: itaque ſi menſura rationis quam habet terminus major ad minorem poſitiva cenſeatur, menſura rationis quam habet terminus minor ad majorem erit negativa, menſura vero rationis inter æquales terminos nullius erit magnitudinis. Porro diverſa menſurarum oriuntur *Syſtemata*, prout modis diverſis exponitur analogia illa determinata & immutabilis quæ eſt inter magnitudines rationum. Inde vero patet, exhiberi poſſe numero infinita Syſtemata, minuendo vel augendo Syſtematis cujuſvis dati menſuras omnes in eadem data quacunque proportione, aut etiam pro menſuris adhibendo quantitates diverſi generis. In tanta autem varietate confuſionem aliquam oboriri neceſſe eſt, ni probe conſtiterit ad quodnam Syſtema referendæ ſint menſuræ ſingulæ de quibus contingat ſermonem inſtitui. Huic malo remedium optime parari poteſt ſi menſura datæ alicujus rationis, quæ commodiſſima videbitur, pro *Modulo* habeatur ad quem conſtanter in omni Syſtemate menſuræ reliquarum rationum exigantur. Id enim ſi fiat, ſtatim ex dato illo Modulo determinabitur Syſtema totum: nam ex menſuris conſtabit quæ Modulo erunt homogeneæ, quæque eo majores habebunt magnitudines vel minores quo major ille fuerit vel minor, ut ita menſurandarum rationum invariata magnitudinum ſervetur analogia inter ipſas menſuras. Patebit igitur in ſequentibus rationem quandam dari, dupli inter & tripli rationes intermediam, ad rationem vero tripli aliquanto propius accedentem, quæ propoſito noſtro non immerito aptiſſima judicetur, ſiquidem ipſa rei natura hujus uſum ſuadere ac non incertis indiciis efflagitare quodammodo videatur. Hanc ego, ex officio ejus deſumpto nomine, *Modularem Rationem* appellabo; quo autem pacto ipſa ſit accuratius definienda, oſtendetur inferius, nunc enim de Logarithmis pauca ſunt addenda.

Logarithmi ſunt rationum menſuræ Numerales: ſolent autem in Canone ſic diſponi, ut ſingulis numeris naturali ordine creſcentibus, & in ſerie continua poſitis adſcribatur Logarithmus, non quidem ipſius numeri uti vulgo dicitur, ſed rationis quam habet numerus ad Unitatem. Exinde vero rationis per quoſcunque terminos deſignatæ facilis eſt inventio Logarithmi. Nam cum ratio antecedentis ad conſequentem ſit exceſſus rationis antecedentis ad Unitatem

ſupra

ſupra rationem conſequentis ad Unitatem: Logarithmus ejus ſimiliter erit exceſſus Logarithmi rationis quam habet antecedens ad Unitatem ſupra Logarithmum rationis quam conſequens habet ad Unitatem; hoc eſt, ut vulgari ſermone utamur, exceſſus Logarithmi antecedentis ſupra Logarithmum conſequentis; neutiquam enim diſplicet loquendi modus jam à multis annis receptus, ſi recte intelligatur. Exinde porro peregregium enaſcitur compendium ad operationes Arithmeticas. Datis enim duobus quibuſcunque numeris in ſe multiplicandis, ſi quæratur numerus ex multiplicatione productus; quoniam rationes numerorum datorum ad Unitatem, conficiunt ſimul additæ rationem producti ad Unitatem, & rationum componendarum menſuræ ſimul additæ conficiunt rationis compoſitæ menſuram: Logarithmus producti æquabitur Logarithmis numerorum datorum ſimul ſumptis. Ad eundem modum ſi quæratur numerus ex diviſione ortus; quoniam ratio diviſoris ad Unitatem è ratione dividendi ad Unitatem detracta relinquit rationem quoti ad Unitatem: habebitur quoti Logarithmus ſubducendo Logarithmum diviſoris è Logarithmo dividendi. Et eodem argumento, ſi quæratur dati cujuſvis numeri quælibet poteſtas; quoniam ratio dati numeri ad Unitatem per Indicem poteſtatis multiplicata rationem efficit quam habet numeri poteſtas ad Unitatem, & menſura prioris rationis multiplicata per eundem Indicem efficit pariter menſuram rationis poſterioris: Logarithmus poteſtatis æquabitur Logarithmo numeri dati per Indicem poteſtatis multiplicato. Et ſimiliter Logarithmus cujuſlibet radicis numeri dati æquabitur Logarithmo numeri dati per Indicem radicis diviſo. Igitur ope Canonis peragetur inventio poteſtatum & radicum per multiplicationem & diviſionem, multiplicatio autem & diviſio per additionem & ſubductionem. Ceterum de hiſce vulgo notis Logarithmorum uſibus non eſt mei inſtituti fuſius diſſerere: miſſis ergo ambagibus, ad alia nunc me confero & rem ipſam protinus aggredior.

PROPOSITIO I.

Invenire Mensuram Rationis cujuscunque propositæ.

PRoponatur Ratio inter *AC* & *AB*, cujus Mensuram oportet invenire. Terminorum differentia *BC* divisa concipiatur in particulas innumeras quam minimas *PQ*, atque ratio inter *AC* & *AB* in totidem rationes quam minimas inter *AQ* & *AP*: & si detur magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*, dividendo dabitur ratio quam habet *PQ* ad *AP*; atque adeo data illa magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*, per datam quantitatem $\frac{PQ}{AP}$ exponi potest. Manente *AP*, augeri vel minui intelligatur particula *PQ* in proportione quavis; & in eadem proportione augebitur vel minuetur magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*: capiatur particula dupla vel tripla, subdupla vel subtripla, & evadet ratio duplicata vel triplicata, subduplicata vel subtriplicata; etiamnum igitur exponetur per quantitatem $\frac{PQ}{AP}$. Sed &, assumpta determinata quavis quantitate M, exponi potest per $M \times \frac{PQ}{AP}$: erit ergo quantitas $M \times \frac{PQ}{AP}$ mensura rationis inter *AQ* & *AP*. Hæc vero mensura diversam habebit magnitudinem, & ad Systema diversum accommodabitur, pro diversa magnitudine quantitatis assumptæ M, quæ adeo vocetur Systematis *Modulus*. Jam quemadmodum summa rationum omnium inter *AQ* & *AP* æqualis est propositæ rationi, quam utique habet *AC* ad *AB*: ita summa mensurarum omnium $M \times \frac{PQ}{AP}$ (per Methodos satis notas inveniendæ) æqualis erit ejusdem propositæ rationis mensuræ quæsitæ. *Q. E. I.*

Corol. 1. Terminis *AP*, *AQ* ita ad æqualitatem accedentibus, ut quam minima sit eorundem differentia *PQ*: erit $M \times \frac{PQ}{AP}$ vel $M \times \frac{PQ}{AQ}$ æqualis mensuræ rationis inter *AQ* & *AP* ad Modulum M.

Corol.

Corol. 2. Unde Modulus ille M est ad mensuram rationis inter terminos AQ & AP, ut terminorum alteruter AP vel AQ ad terminorum differentiam PQ.

Corol. 3. Data ratione inter AC & AB, datur summa omnium $\frac{PQ}{AP}$, & summa omnium $M \times \frac{PQ}{AP}$ est ut M. Itaque mensura datæ cujuscunque rationis est ut Modulus Systematis ex quo desumitur.

Corol. 4. Modulus ergo, in omni mensurarum Systemate, semper æqualis fit mensuræ rationis cujusdam determinatæ atque immutabilis: Quam proinde *Rationem Modularem* vocabo.

Scholium 1.

Problematis solutio per Exemplum illustrabitur. Sit z quantitas determinata quævis & permanens, sit vero x quantitas indeterminata fluxuque perpetuo variabilis, ejusque fluxio sit $\dot{x}$; & quæratur mensura rationis inter $z+x$ & $z-x$. Statuatur hæc ratio æqualis rationi inter y & 1, exponatur autem numerus y per AP, fluxio ejus $\dot{y}$ per PQ, 1 per AB: & ex Corollario primo colligetur fluxionem quæsitæ mensuræ rationis inter y & 1 esse $M \times \frac{\dot{y}}{y}$. Reponatur jam pro y valor ejus $\frac{z+x}{z-x}$, itemque pro $\dot{y}$ valoris fluxio $\frac{2z\dot{x}}{\overline{z-x}|^2}$: & fluxio mensuræ evadet $2M \times \frac{z\dot{x}}{zz-xx}$ vel $2M \times \frac{\dot{x}}{z - \frac{xx}{z}}$ sive $2M$ in $\frac{\dot{x}}{z} + \frac{\dot{x}x^2}{z^3} + \frac{\dot{x}x^4}{z^5} + \&c.$ Atque adeo mensura illa fiet $2M$ in $\frac{x}{z} + \frac{x^3}{3z^3} + \frac{x^5}{5z^5} + \&c.$ Unde patet Corollarium sequens.

Corol. 5. Si duarum quantitatum summa sit z & differentia sit x; & sumatur $2M\frac{x}{z} = A$, $A\frac{xx}{zz} = B$, $B\frac{xx}{zz} = C$, $C\frac{xx}{zz} = D$, &c: Mensura rationis quam habet quantitas major ad quantitatem minorem, erit $A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{7}D + \&c.$

Scholium 2.

Non absimili computo mensura rationis inter $1+v$ & 1 erit M in $v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 - \&c.$ Unde si mensura illa vocetur m, erit $\frac{m}{M} = v - \frac{1}{2}vv + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$, &c: ac proinde unde $\frac{mm}{MM} = vv - v^3 + \frac{11}{12}v^4 - \frac{5}{6}v^5$, &c; similiterque $\frac{m^3}{M^3} = v^3 - \frac{3}{2}v^4 + \frac{7}{4}v^5$, &c; quinetiam $\frac{m^4}{M^4} = v^4 - 2v^5$, &c; ac denique $\frac{m^5}{M^5} = v^5$, &c. Ut igitur viciſſim, ex data menſura m, inveniatur ratio quam metitur; addendo æqualia æqualibus habebitur $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} = v * - \frac{1}{6}v^3 + \frac{5}{24}v^4 - \frac{11}{60}v^5$, &c; atque iterum $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} = v * * - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{40}v^5$, &c; rurſumque $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} = v * * * - \frac{1}{120}v^5$, &c; atque tandem $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} = v * * * *$, &c; id eſt, $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} + \&c. = v$. Itaque ratio quæſita inter $1 + v$ & 1, eſt ea quam habet $1 + \frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} + \&c.$ ad 1. Ponatur $m = M$, ſive $\frac{m}{M} = 1$; & exinde Ratio Modularis erit ea quam habet $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \&c.$ ad 1.

Eodem modo, ſi detur ratio inter 1 & $1 - v$, menſura hujus rationis erit M in $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$, &c. Et viciſſim ſi detur rationis menſura m, ratio erit ea quam habet 1 ad $1 - \frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} - \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} - \frac{m^5}{120M^5} + \&c.$ Ponatur $m = M$, ſive $\frac{m}{M} = 1$; & exinde Ratio Modularis erit ea quam habet 1 ad $1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \&c.$ Ex hiſce vero patet Corollarium ſequens.

Corol. 6. Expoſito termino R, ſi ſumatur $\frac{1}{1}R = A$, $\frac{1}{2}A = B$, $\frac{1}{3}B = C$, $\frac{1}{4}C = D$, $\frac{1}{5}D = E$, &c. in infinitum; & capiatur $S = R + A + B + C + D + E + \&c$: Ratio Modularis erit ea quæ eſt inter terminum minorem expoſitum R & majorem inventum S. Vel expoſito termino S, ſi ſumatur $\frac{1}{1}S = A$, $\frac{1}{2}A = B$, $\frac{1}{3}B = C$, $\frac{1}{4}C = D$, $\frac{1}{5}D = E$, &c. in infinitum; & capiatur $R = S - A + B - C + D - E + \&c$: Ratio Modularis erit ea quæ eſt inter terminum majorem expoſitum S & minorem inventum R. Porro eadem ratio eſt inter 2,71828182859 &c. et 1, vel inter 1 & 0,367879441171 &c.

Scho-

Scholium 3.

Si forte termini minores desiderentur, qui eandem proxime Rationem Modularem ita exhibeant, ut nulli ipsis non majores propius: instituenda erit operatio ad modum sequentem. Dividatur terminus major 2,71828 &c. per minorem 1, vel etiam major 1 per minorem 0,367879 &c. & rursus minor per numerum qui reliquus est, & hic rursus per ultimum residuum, atque ita porro pergatur: &

Rationes Vera Majores.		*Rationes Vera Minores.*	
1	0×2	0	1
2	1	2	0
3	1×2	2	1×1
8	3	6	2
11	4×1	8	3×1
76	28	11	4
87	32×1	19	7×4
106	39	87	32
193	71×6	106	39×1
1264	465	1158	426
1457	536×1	1264	465×1
21768	8008	1457	536
23225	8544×1	2721	1001×8
25946	9545	23225	8544
49171	18089×10	25946	9545×1
&c.	&c.	&c.	&c.

prodibunt quotientes 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, &c. His inventis, perficiendæ sunt binæ rationum columnæ, quarum altera terminos continet rationem habentes vera majorem, altera terminos quorum ratio est vera minor; ineundo computationem à rationibus 1 ad 0, 0 ad 1, quæ remotissimæ sunt à vera; inde autem exorsam deducendo ad rationes reliquas, quæ

quæ continue ad veram propius accedunt. Multiplicentur itaque termini 1 & 0 per quotientem primum 2, & ſcribantur facti 2 & 0 infra terminos 0 & 1; & addendo prodibit ratio 2 + 0 ad 0 + 1, ſive 2 ad 1. Hujus termini multiplicentur per quotientem ſecundum 1, factique 2 & 1 addantur terminis 1 & 0; & habebitur ratio 2 + 1 ad 1 + 0, ſive 3 ad 1. Hujus termini multiplicentur per quotientem tertium 2, factique 6 & 2 addantur terminis præcedentibus 2 & 1; & habebitur ratio 8 ad 3. Hujus termini multiplicentur per quotientem quartum 1, factique 8 & 3 addantur terminis præcedentibus 3 & 1; & habebitur ratio 11 ad 4. Hujus termini multiplicentur per quotientem quintum 1, factique 11 & 4 addantur præcedentibus 8 & 3; & habebitur ratio 19 ad 7. Hujus termini rurſus multiplicentur per quotientem ſextum 4, factique 76 & 28 addantur præcedentibus 11 & 4, ad inveniendam rationem 87 ad 32; & ſic porro pergendum quouſque libuerit, tranſitu alternis facto in alteram columnam. Hiſce peractis, habebuntur rationes vera majores 3 ad 1, 11 ad 4, 87 ad 32, 193 ad 71, 1457 ad 536, 23225 ad 8544, 49171 ad 18089, &c. Vera autem minores erunt 2 ad 1, 8 ad 3, 19 ad 7, 106 ad 39, 1264 ad 465, 2721 ad 1001, 25946 ad 9545, &c. Atque hæ quidem ſunt præcipuæ & primariæ rationes, quibus ad rationem propoſitam continue appropinquatur.

Quod ſi exquiratur integra ſeries rationum omnium vera majorum quæ ita dari poſſint, ut nulla minoribus terminis deſignata ratio vera major ad veram propius accedat; & ſimiliter ſeries integra rationum omnium vera minorum quæ ita dari poſſint, ut nulla minoribus terminis deſignata ratio vera minor ad veram propius accedat: inter primarias illas modo inventas inſerendæ ſunt aliæ ſecundariæ rationes. Hæ vero locum habent ubi quotiens unitatem ſuperat. Inveniuntur autem mutata multiplicatione, quæ ſupra per quotientem facta eſt, in continuam additionem terminorum tot vicibus quot ſunt unitates in quotiente. Sic quia quotiens primus erat 2, termini 1 & 0 bis addendi ſunt terminis 0 & 1; & ſummæ dabunt rationes 1 ad 1, 2 ad 1. Hi ultimi termini 2 & 1, quia quotiens ſecundus erat 1, ſemel addendi ſunt terminis 1 & 0; & ſummæ dabunt rationem 3 ad 1. Hi termini 3 & 1, quia quotiens tertius erat 2, bis addendi ſunt terminis 2 & 1; & ſummæ dabunt rationes 5 ad 2, 8 ad 3. Hi ultimi termini 8 & 3, quia quotiens quartus erat 1, ſemel addendi ſunt terminis 3 & 1; & ſummæ dabunt rationem 11 ad 4. Hi termini 11 & 4, quia quotiens

tiens quintus erat 1, ſemel addendi ſunt terminis 8 & 3; & ſummæ dabunt rationem 19 ad 7. Hi denique termini 19 & 7, quia quo-

Rationes Vera Majores.	
1	0×2
2	1
3	1×2
8	3
11	4×1
19	7
30	11
19	7
49	18
19	7
68	25
19	7
87	32×1
&c.	&c.

Rationes Vera Minores.	
0	1
1	0
1	1
1	0
2	1×1
3	1
5	2
3	1
8	3×1
11	4
19	7×4
87	32
106	39×1
&c.	&c.

tiens ſextus erat 4, quater addendi ſunt terminis 11 & 4; & ſummæ dabunt rationes 30 ad 11, 49 ad 18, 68 ad 25, 87 ad 32. Et ſic porro procedere licebit quouſque commodum videbitur. Iſta tandem operatione peracta, ſeries integra rationum omnium vera majorum, erit 1 ad 0, 3 ad 1, 11 ad 4, 30 ad 11, 49 ad 18, 68 ad 25, 87 ad 32, &c. ſimiliterque ſeries integra rationum omnium vera minorum, erit 0 ad 1, 1 ad 1, 2 ad 1, 5 ad 2, 8 ad 3, 19 ad 7; &c.

Harum approximationum utilitas ad alia multa ſeſe diffundit: quapropter earum inventionem aliquanto prolixius expoſitam dedi, per Methodum quæ mihi ſimpliciſſima & facillima videtur. Idem argumentum paulo aliter pertractarunt Viri celeberrimi *Walliſius* & *Hugenius.*

Propositio II.

Logarithmorum Canonem Briggianum *conſtruere.*

NUmerorum Compoſitorum Logarithmi derivantur ex Logarithmis Primorum componentium, per additionem ſolam; horum autem inveſtigatio pluribus modis inſtitui poteſt: Exemplum unicum appono.

Per Corollarium quintum Propoſitionis ſuperioris, ſcribendo 1 pro M, inveniantur Logarithmi rationum inter 126 & 125, 225 & 224, 2401 & 2400, 4375 & 4374; qui vocentur reſpective p, q, r, s: & Logarithmus denarii ſeu rationis decupli erit $239p + 90q - 63r + 103s$, ſive 2,302585092994 &c. Itaque cum Logarithmus *Briggianus* denarii ſit 1; fiat (per Corol. 3. Prop. 1.) ut denarii Logarithmus modo inventus 2,302585092994 &c, ad Modulum ſuum 1, ita denarii Logarithmus *Briggianus* 1, ad Modulum *Briggianum*, qui adeo erit 0,434294481903 &c. Ponatur ergo deinceps iſte valor pro M, & erunt $M \times \overline{202p + 76q - 53r + 87s}$, $M \times \overline{167p + 63q - 44r + 72s}$, $M \times \overline{114p + 43q - 30r + 49s}$ Logarithmi *Briggiani* numerorum 7, 5, 3. Logarithmus numeri 2 habetur, ſubducendo Logarithmum numeri 5 à Logarithmo numeri 10. Atque ita dantur & Modulus *Briggianus* & Logarithmi Primorum omnium qui ſunt minores denario.

Logarithmi numerorum ſequentium Primorum 11, 13, 17, 19, 23, &c. ita computari poſſunt. Quæratur tum factus à numeris Primo propoſito utrinque proxime adjacentibus, tum Primi ipſius quadratum, quod ſemper unitate factum illud ſuperabit. Logarithmo rationis quadrati ad factum (per Corol. 5. Prop. 1. inveniendo) addatur ipſius facti Logarithmus, qui ſemper componetur ex datis Logarithmis Primorum qui propoſito Primo ſunt minores: & ſemiſumma erit Logarithmus Primi quæſitus.

Corol. Canonis *Briggiani* Modulus eſt 0,434294481903 &c: Hujus vero Reciprocus eſt 2,302585092994 &c.

Scholium.

Ad hunc itaque modum perfici poſſet Logarithmorum Tabula ampliſſima, qualis edita eſt à *Briggio* vel *Vlacco*. Inventioni autem Numerorum & Logarithmorum ſibi invicem congruentium, qui intermedii

termedii ſunt & ultra Tabulæ limites excurrunt, abunde ſufficiet terminus primus Seriei quæ in Corollario quinto Propoſitionis præcedentis exhibetur.

Si dato Numero intermedio quæratur ejus Logarithmus; pone a & e pro Numero intermedio propoſito atque huic proximo tabulari, ita ut a deſignet majorem, e minorem; ſit eorum ſumma z, differentia x; pone λ pro Logarithmo rationis quam habet a ad e, hoc eſt, pro exceſſu Logarithmi Numeri a ſupra Logarithmum Numeri e: & erit $\lambda \doteq 2M\frac{x}{z}$ quamproxime.

Si quæratur Numerus qui congruit Logarithmo intermedio; quoniam eſt $\lambda = \frac{2Mx}{z} = \frac{2Mx}{2a-x}$ vel $\frac{2Mx}{2e+x}$; erit $x = \frac{\lambda}{M+\frac{1}{2}\lambda}a$ vel $\frac{\lambda}{M-\frac{1}{2}\lambda}e$ quamproxime.

Propositio III.

Syſtematis cujuſvis Logometrici conſtructionem exponere per Canonem Logarithmorum.

Caſ. 1. SI detur, è Syſtemate propoſito, menſura rationis alicujus determinatæ: rationis cujuſvis oblatæ menſura, erit ad menſuram illam datam determinatæ rationis, ut oblatæ rationis Logarithmus, ad Logarithmum rationis ejuſdem determinatæ.

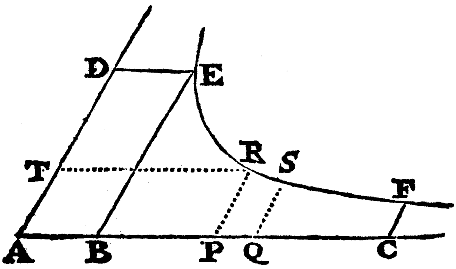
Caſ. 2. Si non detur, è Syſtemate propoſito, menſura rationis alicujus determinatæ: inveniendus erit Modulus propoſiti Syſtematis, per Corollarium ſecundum Propoſitionis primæ. Et menſura cujuſvis oblatæ rationis, erit ad Modulum inventum, ut oblatæ rationis Logarithmus, ad Canonis Modulum.

Caſus hujus ultimi habentur Exempla in ſequentibus.

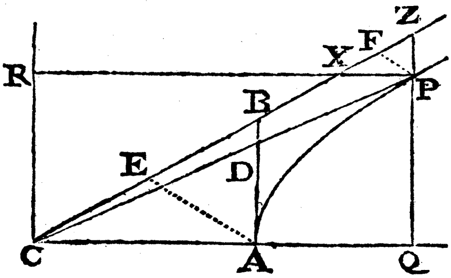
Propositio IV.

Spatium quodvis Hyperbolicum quadrare per Canonem Logarithmorum.

SIT Hyperbola quævis *ERSF* centro *A*, Aſymptotis *ABC*, *AD* deſcripta; & quæratur area *BEFC* quam claudunt rectæ *BE*, *CF* ad Aſymptoton *AD* parallelæ. Compleatur parallelogrammum *ABED*, & ad hunc Modulum inveniatur (per Propositionem tertiam) mensura rationis inter *AC* & *AB* vel inter *BE* & *CF*: Dico mensuram inventam æqualem fore magnitudini areæ quæsitæ *BEFC*. Nam divisa concipiatur hujus areæ basis *BC* in particulas innumeras quam minimas *PQ*, ea lege, ut ubique detur ratio illa quæ est inter *AQ* & *AP*, & ducantur Asymptoto *AD* parallelæ *PR*, *QS*. Quoniam itaque est *AQ* ut *AP*; erit divisim *PQ* ut *AP*, hoc est, ut *PR* reciproce. Unde data est area *PRSQ*, quæ proinde potest haberi pro mensura rationis datæ quæ est inter *AQ* & *AP*. Hujus autem mensuræ Modulus erit parallelogrammum *ABED*, per Corol. 2. Prop. 1. Nam si compleatur æquale parallelogrammum *APRT*; statim intelligetur, ita illud se habere ad aream *PRSQ*, ut se habet *AP* ad *PQ*. Similes ergo summas arearum atque rationum utrinque colligendo; area tota *BEFC* erit mensura rationis totius quæ est inter *AC* & *AB*, vel inter *BE* & *CF*, ad eundem Modulum *ABED*.



Aliter. Sit rursus Hyperbola quævis *AP*, centro *C* atque Asymptoto *CB* descripta; & quæratur area Sectoris cujuslibet *CAP*, semidiametris *CA*, *CP* curvæque *AP* interjecti. Producta semidiametro utravis *CAQ* ultra verticem *A*, ducatur illius conjugata *CR*; & ad ipsas *CQ*, *CR* ordinatim applicentur à puncto *P* rectæ *PQ*, *PR*, quæ Asymptoto *CB* occurrant in *Z* & *X*; deinde agatur *AB* quæ Hyperbolam tangat in *A*, Asymptoton secet in *B* rectamque *CP* in *D*: & Triangulo *ABC* existente Modulo, area quæsita sectoris *CAP* erit mensura rationis inter $QZ + QP$ & *AB*, sive rationis inter *AB* & $QZ - QP$, sive

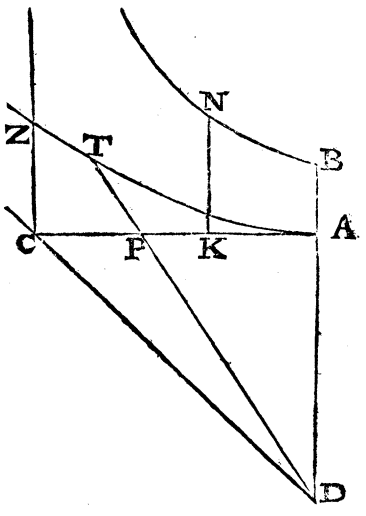


ſive ſubduplicatæ rationis inter $QZ + QP$ & $QZ - QP$, ſive ſubduplicatæ rationis inter $AB + AD$ & $AB - AD$; vel erit menſura rationis inter $RP + RX$ & CA, vel rationis inter CA & $RP - RX$, vel ſubduplicatæ rationis inter $RP + RX$ & $RP - RX$. Nam ſi ducantur rectæ AE, PF quæ ſecent Aſymptoton CB in E & F, alterique Aſymptoto parallelæ ſint: æquales erunt hæ omnes rationes rationi quam habet AE ad PF, vel CF ad CE; erit & ſector CAP areæ $EAPF$ æqualis; ſimiliterque triangulum ABC duplicato triangulo AEC, ſive parallelogrammo Aſymptotis & Hyperbolæ inſcripto æquabitur. Quare patet propoſitum ex ſupra demonſtratis.

Data vero per modum priorem area $BEFC$, vel per modum poſteriorem area CAP; dabitur alia quævis area Hyperbolica ad arcum EF, vel ad arcum AP terminata: quippe quæ ſemper eſt areæ modo inventæ & areæ alicujus rectilineæ vel ſumma vel differentia. *Q. E. I.*

Scholium.

Hinc facilem habent ſolutionem Problemata omnia, quæcunque pendent ab Hyperbolæ quadratura. Exemplum ſatis luculentum præbebit deſcenſus gravium in Mediis, quorum reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis corporis moti. Sit V velocitas maxima quam corpus in hujuſmodi Medio, infinite deſcendendo, poteſt acquirere; T dimidium temporis quo corpus idem in eodem Medio, vi ſola ponderis ſui relativi, abſque reſiſtentia cadendo velocitatem illam acquiret; S ſpatium hocce caſu deſcriptum; R pondus relativum corporis in Medio reſiſtente: & quæratur ſpatium s quod corpus deſcendens, tempore quovis t, deſcribet in Medio reſiſtente; & reſiſtentia r quam patitur in fine illius temporis; & velocitas v ex iſto deſcenſu acquiſita.

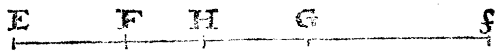


Centro D, vertice A deſcribatur Hyperbola æquilatera AT, cujus una Aſymptotorum eſt DC & ad verticem tangens AC ſemiaxi AD æqualis. Capiatur area DAT ad dimidium trianguli DAC ut t ad T, ſecetque DT tangentem AC in P:

&

& erit v ad V ut AP ad AC. Sit AK ipsis AC, AP tertia proportionalis: & erit r ad R ut AK ad AC. Ad tangentem AC erigantur normales CZ, KN, AB; centroque C & Asymptotis CA, CZ describatur Hyperbola quævis BN: & erit s ad S ut area $ABNK$ ad rectangulum CKN. Patent hæc omnia per Propositiones octavam & nonam Libri secundi Philosophiæ *Newtonianæ*.

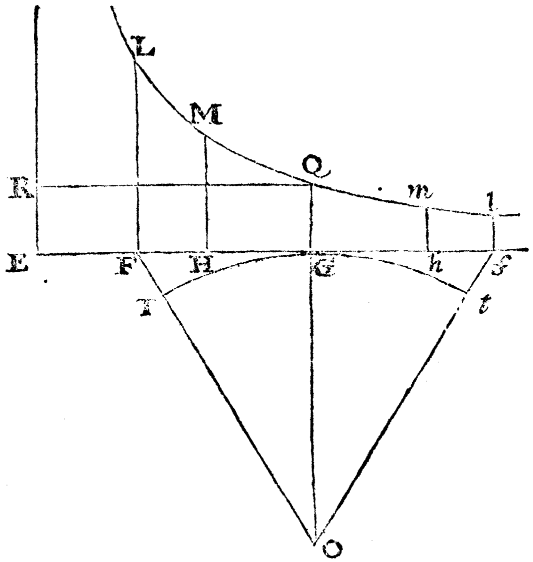
Est itaque t ad T ut area Hyperbolica DAT ad dimidium trianguli DAC, hoc est, ut dimidiata mensura rationis inter $AC+AP$ & $AC-AP$ ad illius mensuræ dimidiatum Modulum. Ergo si recta quævis EF producatur ad f, ita ut t sit mensura rationis inter Ef & EF ad Modulum T, & bisecetur Ff in G: erit GF ad GE ut AP ad AC, hoc est, ut v ad V. Sumantur GE, GF, GH continue proportionales: & erit GH ad GE ut AK ad AC, hoc est, ut r ad R. Erit insuper EG ad EH ut CA ad CK; unde cum sit s ad S ut area $ABNK$ ad rectangulum CKN, hoc est, ut mensura rationis inter CA & CK vel inter EG & EH ad mensuræ Modulum: erit s mensura rationis inter EG & EH ad Modulum S, atque inde dabitur.



Ex hisce porro facillime se prodit, per unicam quamvis Hyperbolam, constructio non inconcinna; quam & adscribere visum est ob dignitatem Problematis. In recta quavis GE sumatur utcunque punctum F inter E & G, & ab altera parte capiatur Gf ipsi GF æqualis, & sint GE, GF, GH continue proportionales. Deinde per puncta E, F, H, G, f ducantur sibi invicem parallelæ rectæ ER, FL, HM, GQ, fl, quas secet Hyperbola quævis $LMQl$ centro E, Asymptotis ER, EG descripta, & compleatur parallelogrammum $EGQR$. Jam si sit t ad T ut area Hyperbolica $LFfl$ ad parallelogrammum EQ: erit s ad S ut area $MHGQ$ ad EQ; v ad V ut GF ad GE; r ad R ut GH ad GE.

Libet & casum alterum adjicere ubi corpus ascendit; ne forte analogia illa, quæ inter utrumque servari debet, in allata constructione quodammodo perire videatur. Ergo eadem atque prius denotantibus V, R, T, S, ponantur v & r pro velocitate & resistentia sub ascensus initio, s pro spatio quod corpus ascendendo describere possit antequam tota velocitas amittatur, t pro tempore hujus ascensus. Ad EG erigatur perpendicularis GO ipsi EG æqualis, & sumendo puncta F, f, ad easdem distantias hinc inde à puncto G, jun-

jungantur OF, Of, quibus occurrat in T & t circuli arcus TGt centro O deſcriptus, & ſint Gh, Gf, GE continue proportionales, & ducatur ipſi ER parallela hm Hyperbolæ occurrens in m. De-



inde ſi t ſit menſura anguli FOf ad Modulum T, hoc eſt, ſi t ſit ad T ut arcus TGt ad radium OG: erit s menſura rationis inter Eh & EG ad Modulum S, vel erit s ad S ut area Hyperbolica $mhGQ$ ad EQ; & v erit ad V ut Gf ad GE; atque r ad R ut Gh ad GE.

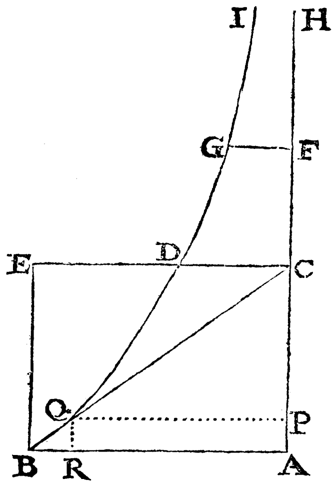
Propositio V.

Logiſticam deſcribere per Canonem Logarithmorum.

Si ad Logiſticæ $BQDG$ Aſymptoton $APCF$ ordinatim applicentur binæ quævis rectæ AB, FG intercludentes Aſymptoti portionem quamvis AF: erit illa portio menſura rationis quam ad invicem habent ordinatæ; hæc utique eſt natura Curvæ notiſſima. Integrum ergo & perfectum Syſtema Logometricum per hanc Lineam exhibetur: id quod etiam de Hyperbola dici poteſt per Propoſitionem præcedentem, de Spirali Æquiangula per ſubſequentem; nam

nam omitto complures alias Figuras, quæ & ipſæ dudum ſunt in Geometriam receptæ. Itaque ſi detur Aſymptoti poſitio & ſimul duo puncta per quæ Curva tranſire debet, dabuntur puncta reliqua per caſum priorem Propoſitionis tertiæ. Quod ſi data poſitione Aſymptoti, detur inſuper Syſtematis Modulus atque unicum punctum per quod ducenda erit Curva; invenientur puncta reliqua per Caſum poſteriorem Propoſitionis ejuſdem. Iſte vero Modulus quo pacto definiendus ſit, & qualem habeat magnitudinem, jam oportet exponere.

Ducatur recta *BC* quæ Curvam tangat in *B* & Aſymptoton ſecet in *C*. Dico primo, magnitudinem ſubtangentis *AC* eandem permanere ubicunque ſumatur punctum *B*. Intelligatur enim Ordinata *PQ* viciniſſima Ordinatæ *ARB*, recta vero *QR* parallela Aſymptoto *AC*, ac detur Ordinatarum intervallum illud quam minimum *AP*. Ob datam igitur lineolam *AP*, dabitur ratio quam habet *AB* ad *PQ*, & diviſim ratio quam habet *AB* ad *RB*, atque adeo (propter ſimilia triangula *BAC*, *BRQ*) ratio quam habet *AC* ad *RQ* ſive *AP*, atque inde magnitudo ipſius *AC*.



Dico ſecundo, determinatam hanc & immutabilem ſubtangentem *AC*, eſſe Modulum ad quem exigendæ ſunt menſuræ illæ interceptæ *AF*. Patet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis primæ: nam dum termini *AB* & *PQ* ad æqualitatem proxime accedunt, erit *AC* ad *AP*, quæ metitur rationem inter *AB* & *PQ*, ut terminus *AB* ad terminorum differentiam *BR*. Unde data ſubtangente, facilis eſt deſcriptio Curvæ & ſolutio Problematum omnium quæ exhinc pendent.

Si Curva jam deſcripta habeatur, ſubtangentis magnitudo ſic determinabitur. Producatur Ordinata quævis *CD* ad *E*, ita ut *CE* ad *CD* rationem habeat Modularem, per Corollarium ſextum Propoſitionis primæ definitam; & recta *EB* quæ à puncto *E* parallela ducitur Aſymptoto, quæque Curvæ occurrit in puncto *B*, æqualis erit ſubtangenti quæſitæ.

Corol. 1. Area *ABIH*, quæ inter Curvam *BDI* & Aſymptoton ejus *ACH* infinite verſus *HI* extenditur, & ad alteram partem ab Ordinata *AB* terminatur, æqualis eſt parallelogrammo *ABEC* ab Ordinata eadem *AB* & ſubtangente *AC* comprehenſo. Componuntur enim area & parallelogrammum ex elementis quæ ſunt ut $AP \times AB$ & $AC \times RB$, quæque adeo æquantur propter analogiam inter *AP* & *RB*, *AC* & *AB*.

Corol. 2. Atque hinc, ob datam ſubtangentis magnitudinem, area illa indefinita erit ut Ordinata ad quam terminatur.

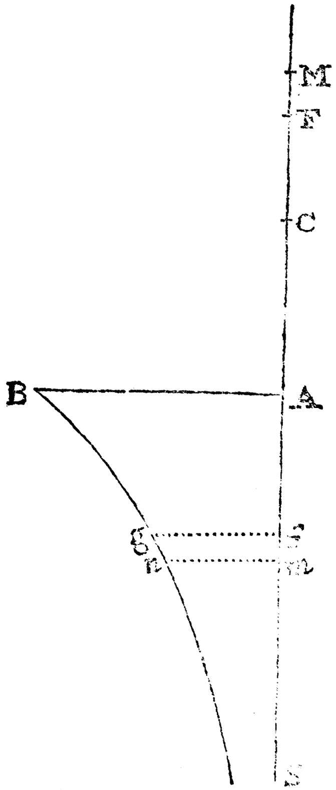
Scholium.

Hujus Propoſitionis uſus per Exemplum declarabitur. Proponatur ad quamlibet altitudinem à ſuperficie telluris, invenire denſitatem Atmoſphæræ. Sit *AB* telluris ſuperficies, & abinde ſurſum producatur perpendicularis *AH*, atque ad hujus puncta ſingula ductæ concipiantur Ordinatæ *FG*, quæ ſint ut Aeris denſitates in locis *F*; & Ordinatarum termini omnes *G* in Linea Logiſtica *BDGI* ſiti erunt. Patet hoc per Corollarium ſecundum hujus Propoſitionis. Nam area indefinita *FGIH* eſt ut quantitas ſeu pondus Atmoſphæræ ſupra locum *F*, & pondus illud eſt vis quæ comprimit Aerem in hoc loco, iſthæc vero vis (uti docet Experientia multiplex) eſt ut Aeris compreſſi denſitas *FG*.

Itaque ſi quotlibet altitudines ſumantur in Arithmetica progreſſione: denſitates Aeris in his altitudinibus erunt in progreſſione Geometrica; & differentia binarum quarumvis altitudinum, erit menſura rationis quæ eſt inter denſitates Aeris in iſtis altitudinibus.

Ceſſante vi gravitatis, ita jam per vim aliquam extraneam intelligatur Aeris facta compreſſio, ut eandem habeat ubique denſitatem quam ad terræ ſuperficiem; & quantitas ejus, quæ modo erat expoſita per aream indefinitam *HABI*, nunc per æquale rectangulum *ABEC* exhibebitur. Atmoſphæræ hujus homogeneæ altitudo *AC*, eſt ad altitudinem Hydrargyri in tubo *Torricellii*, ut gravitas Hydrargyri ad gravitatem Aeris; atque inde datur. Huic autem datæ altitudini æquatur (per Corol. 1.) ſubtangens Curvæ *BDGI*, atque adeo Modulus Syſtematis menſurarum omnium *AF*. Eſt ergo Logarithmus rationis inter denſitates Aeris in binis quibuſvis altitudinibus, ad Modulum Canonis, ut altitudinum earundem differentia, ad Atmoſphæræ prædictæ homogeneæ altitudinem illam datam *AC*.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi, quod vis gravitatis eadem ſit ad omnes altitudines. Ceterum ex Philoſophia *Newtoniana* conſtat eam diminui, in receſſu à centro telluris, in duplicata ratione diſtantiæ: concluſio itaque paulo aliter ſe habebit. Sit S centrum telluris, & AB ſuperficies ejuſdem; ſumatur ipſis SF, SA tertia proportionalis Sf, erigatur ordinata fg quæ ſit ut Aeris denſitas in F: & Curva Bgn quam punctum g perpetuo tangit, erit eadem atque prius Logiſtica, ſed inverſo ſitu. Augeatur enim altitudo AF particula quam minima FM, capiatur Sm ad SA ut SA ad SM, ducatur Ordinata mn quæ ſit ut Aeris denſitas in M; & erit Sm ad Sf ut SF ad SM, & diviſim fm ad FM ut Sf ad SM, ſive ut Sf ad SF, hoc eſt, ut SAq ad SFq. Unde fm eſt ut SFq inverſe & FM directe, id eſt, ut gravitatio & moles Aeris inter F & M conjunctim; adeoque $fm \times fg$ ſive area $fgnm$ eſt ut gravitatio, moles & denſitas ejuſdem Aeris conjunctim, hoc eſt, ut preſſio illius in Aerem inferiorem: & ſumma ſimilium omnium arearum infra fg eſt ut ſumma preſſionum omnium ſupra F, id eſt, ut Aeris in F denſitas fg: & ſummarum differentia $fgnm$ ut denſitatum differentia $fg - mn$. Detur lineola fm; & erit fg ut area $fgnm$, adeoque ut $fg - mn$, atque inde (componendo) ut mn. Ergo data lineola fm erit menſura datæ illius rationis quæ eſt inter fg & mn: atque hinc patet Curvam Bgn eſſe Logiſticam. Sed & eandem eſſe cum ſupra deſcripta Logiſtica, facile abinde colligitur, quod ordinatæ baſi AB viciniſſimæ & ad æqualia intervalla quam minima diſpoſitæ, reſpective ſint æquales in utraque Curva; ac proinde eadem curvatura, eadem inclinatio tangentis ad punctum B, eademque ſubtangentis magnitudo.



Ergo

Ergo si distantiæ SF à centro telluris, capiantur in Musica progressione; harum reciprocæ, nempe distantiæ Sf, erunt in progressione Arithmetica; & Aeris densitates fg erunt in progressione Geometrica.

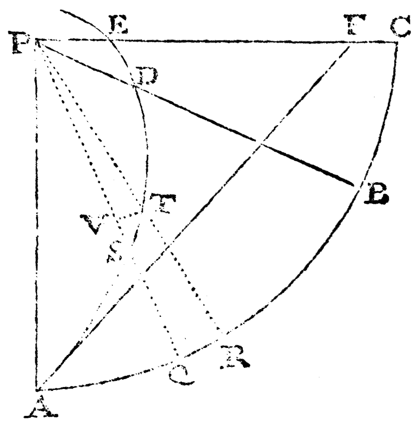
Ad inveniendam itaque densitatem in loco quovis F, minuenda est altitudo AF in ratione distantiæ SF ad telluris semidiametrum SA: & Logarithmus rationis inter densitates Aeris in A & F, erit ad Modulum Canonis, ut altitudo illa diminuta Af, ad Atmosphæræ homogeneæ altitudinem AC.

Quæ supra demonstrata sunt, accurate obtinebunt, si modo Atmosphæra ex Aere pariter Elastico tota constet: rationes igitur allatas paululum conturbabunt admisti vapores atque exhalationes, quibus etiam accedet Caloris Frigorisque diversa temperies ad altitudines diversas.

Propositio VI.

Logarithmorum Canonem ad Spiralem Æquiangulam accomodare.

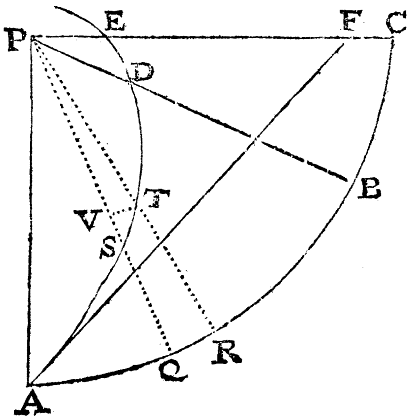
ÆQuiangula Spiralis appellatur Linea illa curva ADE, quæ polo P descripta, in eodem dato angulo secat exeuntes à polo radios PA, PD, PE, &c.



Si centro P & intervallo quovis PA describatur circulus ABC, qui radiis PA, PD, PE occurrat in A, B, C: Dico interceptum arcum BC mensuram fore rationis quam habet PD ad PE, & interceptum arcum AB mensuram rationis quam habet PA ad PD. Dividatur enim arcus AB in particulas quam minimas & æquales QR, & jungantur PQ, PR secantes Spiralem ad S & T in angulis datis PST, PTS: & ob datam particulam QR, dabitur angulus QPR, atque adeo species Figuræ SPT, & ratio laterum PS, PT. Data ergo particula QR mensura erit rationis datæ quam

 habet

habet PS ad PT; & summa particularum, nempe arcus AB, mensura erit summæ similis rationum, hoc est, rationis quam habet PA ad PD. Et eodem argumento, erit arcus BC mensura rationis quam habet PD ad PE.



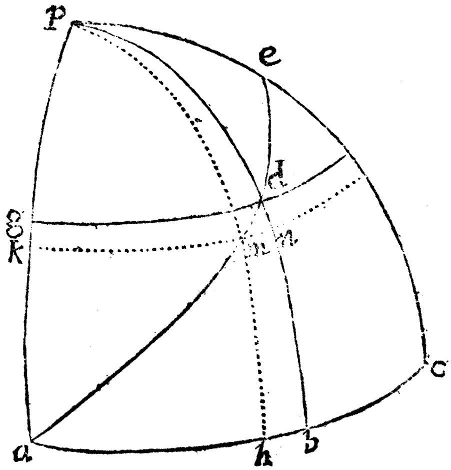
Ducatur AF Spiralem tangens ad Circuli & Spiralis intersectionem A, huic vero in F occurrat recta PC quæ ad radium PA normalis erigitur: & subtangens PF erit mensurarum Modulus, per Corol. 2. Prop. 1. Nam si in recta PS sumatur PV ipsi PT æqualis, & jungantur puncta V, T; similia erunt triangula PAF, VST. Unde PF est ad VT ut PA ad VS, sed & VT est ad QR ut PT ad PA: ergo ex æquo perturbate, PF est ad QR quæ metitur rationem inter PS ad PT, ut terminus PT ad terminorum differentiam VS.

Scholium.

Spiralem æquiangulam, ad Meridianæ Nauticæ divisionem demonstrandam, feliciter adhibuit Geometra clarissimus *Edmundus Halleius*. Sit *acp* pars octava Sphæræ terrestris, *p* Polus, *ac* quadrans Æquatoris, *ap* quadrans Meridiani; & quæratur magnitudo rectæ, quæ propositum quemlibet hujus arcum designet in Planisphærio. Per Æquatoris & Meridiani intersectionem *a*, ducta intelligatur linea Helicoeides *ade* quæ secet omnes Meridianos ad angulum semirectum, huic occurrat in *d* parallelus Æquatori circulus *gd*, per idem punctum *d* agatur Meridianus *pdb*; & longitudo intercepti arcus Æquatoris *ab*, erit magnitudo Nautica quæsita arcus *ag*. Resolvatur enim arcus *ag* in particulas innumeras quam minimas *gk*, ducatur parallelus *kmn*, secans Meridianum *pdb* in *n*, Lineam *ade* in *m*; & actus Meridianus *pmh* abscindet Æquatoris particulam *bh*, quæ erit ad *mn*, sive huic (ob angulum semirectum *mdn*) æqualem *dn* vel *gk*, ut peripheria Æquatoris ad peripheriam paralleli *kmn*. Est ergo particula *bh* magnitudo Nautica particulæ *gk*, & summa particularum omnium *bh*, nempe longitudo arcus *ab*, magnitudo Nautica

tica

tica summæ particularum omnium *gk*, id est, arcus *ag*. Manente jam Æquatore *abc* vel *ABC*, concipiatur Sphærica superficies in plano ejus Stereographice depingi; & Polo *p* occupante centrum *P*, projicientur Meridiani *pga*, *pdb*, *pec* in totidem rectas *PA*, *PDB*, *PEC* à centro *P* exeuntes, ita ut distantia abinde puncti cujusvis *D* vel *A*, tangens sit arcus dimidiati *pd* vel *pa* quem distantia illa repræsentat. Linea vero Helicoeides *ade* convertet se in Spiralem æquiangulam *ADE*, polo *P* descriptam, & secantem radios suos omnes ad angulum semirectum. Hoc siquidem postulat nota Lex hujusce Projectionis, ut anguli omnes eandem in Plano ac in Sphærica superficie magnitudinem servent. Arcus itaque propositi *ag* magnitudo Nautica *ab* vel *AB*, est ad subtangentem *PF* vel huic jam æqualem Sphæræ radium *PC*, ut Logarithmus rationis inter *PA* & *PD*, hoc est, inter tangentes dimidiatorum arcuum *pa* & *pd*, vel *pa* & *pg*, ad Modulum Canonis.

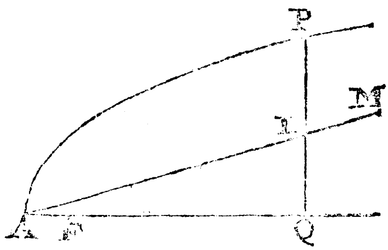


Hinc quoniam longitudo Radii est ad longitudinem arcus minuti unius primi, ut 3437,74677078493 &c ad 1, & reciprocus Moduli Canonis est 2,302585092994 &c, atque hi numeri in se multiplicati efficiunt 7915,704467897819 &c: si magnitudo illa Nautica *AB* in minutis primis exhibenda sit, uti mos exigit; subducta tangente artificiali dimidiati arcus *pg* à tangente artificiali dimidiati arcus *pa*, multiplicetur residuum per numerum 7915,704467897819 &c, et factus dabit partes Meridionales desideratas. Perinde vero se habebit conclusio, sive in Æquatore, sive extra hunc alibi ad utramvis partem locetur punctum *a*.

SCHO-

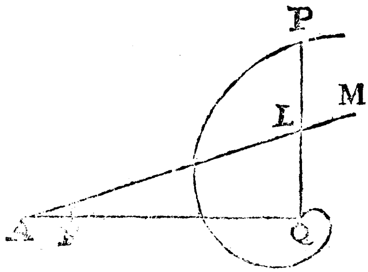
Scholium Generale.

IN eum potiſſimum finem præcedentia conſcripſi, ut allatis aliquot Exemplis oſtenderem, qua commodiſſima ratione Logarithmorum uſus in Geometriam recipi, & ad reſolutionem Problematum difficiliorum adhiberi poſſit. Viſum eſt hoc loco nonnullas adjicere porro conſtructiones, eodem conſilio effectas, quæ mihi iſta tractanti ſubinde ſeſe obviam non invitæ dederunt: ut ita, ex uberiore ſpecimine, de præſtantia Methodi hujus Logometricæ judicium feratur.

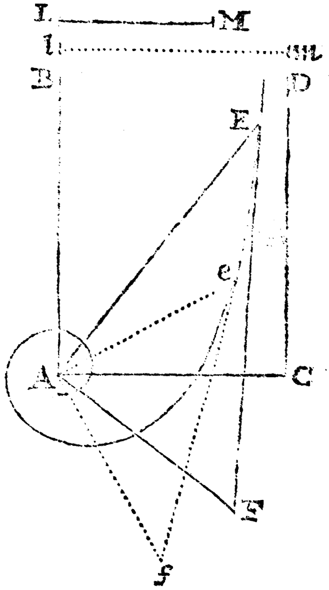


Parabolæ *Apollonianæ* AP ſit A vertex, F focus, AQ axis, PQ ordinatim applicata ad axem. Ducatur AL quæ bifariam ſecet PQ in L, & productæ adjiciatur LM quæ ſit menſura rationis inter $LA + AQ$ & QL ad Modulum AF: & recta AM æqualis erit arcui Parabolico AP.

Spiralis *Archimedea* PQ ſimilem habet extenſionem in rectam. Sit Q polus ejus, QP radius à polo ductus ad Curvæ quodlibet punctum P, & ad eum radium normalis QA. Ducatur LA parallela tangenti Spiralem in P, quæ radium PQ bifariam ſecet in L; & ponendo AF ad QL ut QL ad QA, ipſi AL adjiciatur LM quæ ſit menſura rationis inter $LA + AQ$ & QL ad Modulum AF: & recta AM æquabitur Spiralis arcui PQ.

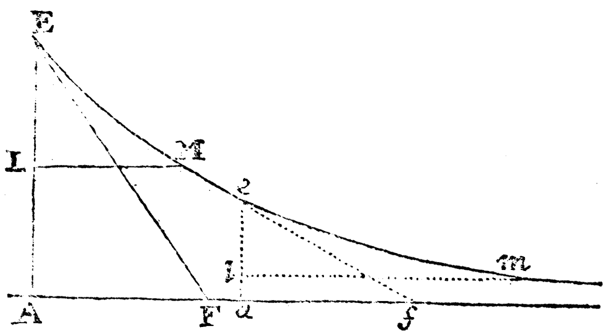


Spiralis Reciprocæ AeE ſit A polus, AB radius primus & infinitus, CD aſymptotos radio primo parallela ad diſtantiam AC; & invenienda proponatur hujuſce Curvæ longitudo. Inter Spiralem illam vulgarem *Archimedis* atque hanc, quam Reciprocam appello, iſthæc intercedit differentia, quod cum illius radii ſint ut anguli quos faciunt cum radio ſuo primo, hujus radii è contrario ſunt



ſunt reciproce ut iidem anguli: eandem utique proportionem habet radius AE ad radium Ae quam habet angulus eAB ad angulum EAB. Unde facile colligitur, ſi ad puncta E & e ducantur tangentes EF, ef, & ad radios AE, Ae erigantur normales AF, Af, fore normales iſtas ſibi invicem & Aſymptoti intervallo AC æquales. Invenietur autem longitudo cujuſvis arcus Ee, ponendo LM menſuram rationis inter AE & $EF - AF$ ad Modulum AF, & ſimiliter lm menſuram rationis inter Ae & $ef - Af$ ad æqualem Modulum Af. Nam ſi tangentium differentiæ $EF - ef$ adjiciatur menſurarum differentia $lm - LM$, aggregatum æquabitur arcui Ee.

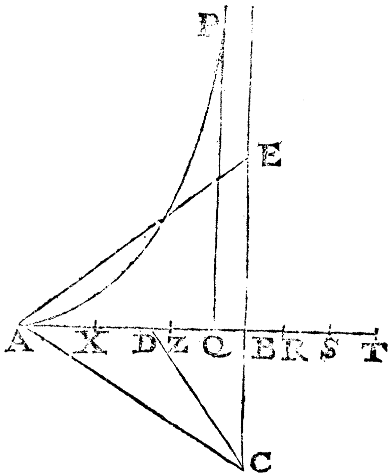
Linea illa Logiſtica, cujus aliquas expoſuimus affectiones in Propoſitione quinta, non abſimilem habet longitudinis ſuæ determinationem; quam & hoc loco apponam in eorum gratiam qui hujuſ-



modi contemplationibus delectantur. Oblata ſit igitur Logiſtica $EMem$, cujus Aſymptotos $AFaf$: & quæratur longitudo cujuſvis arcus Ee. Demiſſis in Aſymptoton perpendiculis ELA, ela,

& ductis tangentibus EF, ef, capiatur AL æqualis excessui quo tangens EF superat subtangentem AF, & similiter al æqualis excessui quo tangens ef superat subtangentem af: & actis LM, lm Asymptoto parallelis, si tangentium differentiæ $EF-ef$ adjiciatur parallelarum differentia $lm-LM$, aggregatum æquabitur arcui Ee.

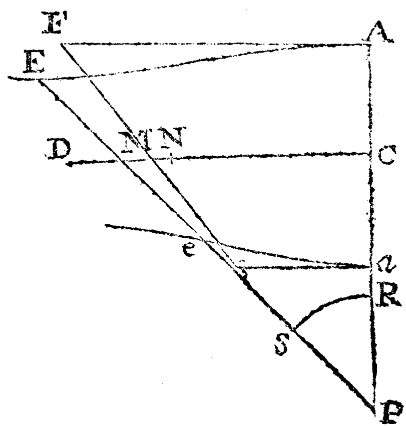
Accedo ad Cissoidem *Diocleam*. Sit A vertex ejus AB diameter Circuli genitoris, BC Asymptotos, PQ perpendicularis in diametrum demissa, Cissoidi in P & diametro in Q occurrens. Agatur AC quæ secet Asymptoton in C ac faciat angulum BAC qui sit recti pars tertia, sumptaque inter BQ & BA media proportionali BD jungatur CD; denique per medium perpendiculum PQ ducatur AE recta, quæ occurrat Asymptoto in E: & Cissoidis arcus AP æquabitur duplicato excessui rectæ AE supra diametrum AB, & simul triplicatæ mensuræ rationis inter $BA+AC$ & $BD+DC$ ad Modulum BC.



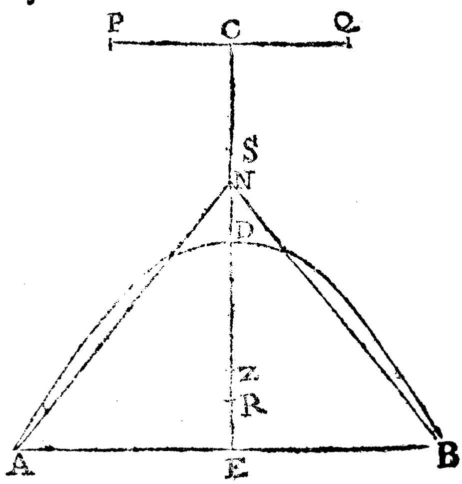
Si Cissoidis area APQ convertatur circum axem AQ; generabitur solidum cujus dimensio pendet à Logometria, & sic construitur. Sint AQ, AB, AR, AS, AT continue proportionales; deinde ad Modulum TS capiatur QX mensura rationis inter AB & BQ, & retro ponatur XZ æqualis ipsi SR una cum dimidio ipsius RB ac triente simul ipsius BQ: & solidum Cissoidale axem habens AQ basisque semidiametrum PQ, æquabitur Cylindro cujus eadem est basis & cujus altitudo est QZ.

Adjungam solidum ex Conchoide *Nicomedis* genitum. Sint AE, ae Curvæ conjugatæ, polo P, regula CD, intervallo CA vel Ca, axe $PaCA$ ad regulam normali, verticibusque A & a descriptæ. Per polum P ducatur ad libitum recta $PeDE$, regulæ occurrens in D, Lineæ vero in E & e: & ex natura Conchoidis, erunt segmenta DE, De intervallo CA vel Ca æqualia. Eodem intervallo centroque P describatur circuli arcus RS secans axem PC in R &

rectam PD in S: & semisumma solidorum Conchoidalium quæ generantur ex conversione Figurarum $AEDC$, $aeDC$ circum axem AaP, erit ad sectorem Sphæræ genitum ex circuli sectore PRS circum axem eundem converso, ut $3PC \times PD + PRq$ ad PRq. Eorundem vero semidifferentia Cylindro æquatur, cujus basis est circulus diametro Aa descriptus, & cujus altitudo est mensura duplicata rationis inter PD & PC ad Modulum PC.



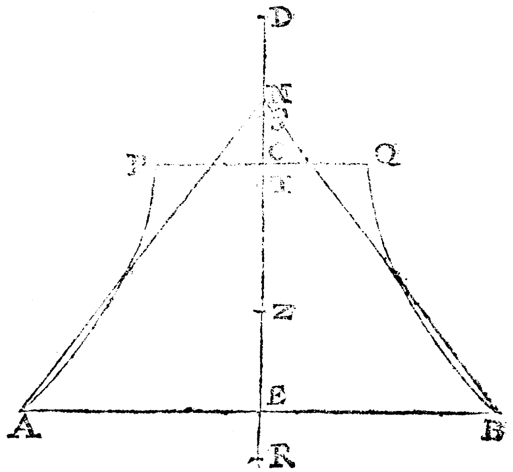
Area vero Figuræ totius $AEea$ æquatur rectangulo cujus basis est Aa, & cujus altitudo CM est mensura rationis inter $PD + DC$ & PC ad Modulum PC. Quod si desideretur quadratura partium $AEDC$, $aeDC$; ductis ad axem normalibus AF, af, in regula CD sumenda est CN quæ sit anguli CPD mensura ad eundem Modulum PC: & acta per punctum M recta FMf quæ parallela sit rectæ jungenti puncta P, N, quæque occurrat normalibus in F & f; erit area $AEDC$ æqualis Trapezio $AFMC$, & area $aeDC$ æqualis Trapezio $afMC$.



Hyperbolæ quadraturam in superioribus expositam dedi, eo modo, qui mihi visus est ad propositum quam maxime accommodatus. Libet aliam constructionem hoc loco apponere, & simul adjicere gravitatis centrum. Oblata sit portio interior ADB, interclusa curvæ ADB & rectæ cuivis AB ad diametrum PQ parallelæ. A Figuræ centro C producatur diameter CDE, quæ basin AB bifariam secet in E; deinde si in diametro producta sumantur CR ad CD, & CD ad CS, ut basis AB ad diametrum PQ, & ad Modulum CS fiat CN mensura rationis quam habet CD ad ER: triangulum rectilineum ANB æquabitur areæ curvilineæ ADB.

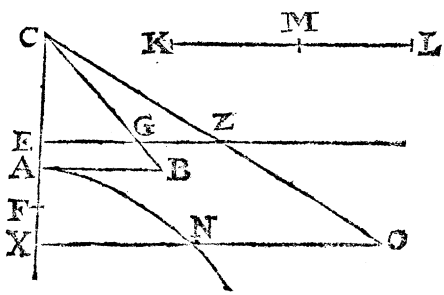
Hujus autem areæ centrum gravitatis Z invenietur, capiendo CZ ad CR ut $2CR$ ad $3EN$.

Sit nunc oblata portio exterior $APQB$, interclusa curvis oppositis AP, BQ, diametro PQ, & rectæ cuivis AB ad diametrum illam parallelæ. Esto CD conjugatæ semidiametri longitudo extra portionem oblatam $APQB$ posita, quæ producta in contrariam partem centri C bifariam secet basim AB in E. Deinde in diametro producta si sumantur CR ad CD, & CD ad CS, & CS ad CT, ut basis AB ad diametrum PQ, ponantur vero CR & CT ad eandem centri partem cum basi AB; & ad Modulum CS, in contrariam centri partem, sumatur CN mensura rationis quam habet CD ad ER: triangulum rectilineum ANB æquabitur areæ curvilineæ $APQB$.



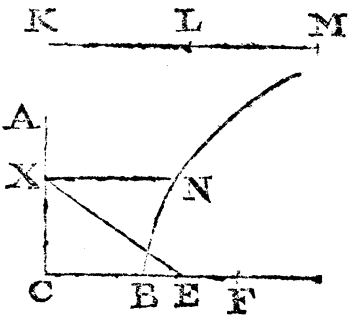
Hujus autem areæ centrum gravitatis Z invenietur, capiendo CZ ad CR ut $2TR$ ad $3EN$.

Pergo ad superficies ab Hyperbola circum axes suos convoluta genitas. Sit AN Hyperbola descripta vertice A, centro C, Asymptoto CB, foco F, semiaxe principali AC, semiaxe conjugato AB normali ad AC; & ad axis AC punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Hyperbolæ occurrat ad N.

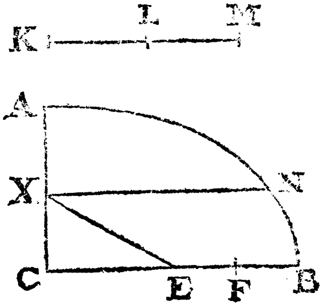


In axe CA capiatur CE ad CA ut CA ad CF; & ad eundem axem erecta perpendiculari EZ, quæ Asymptoto occurrat in G, angulo CEZ inscribatur æqualis ipsi CX recta CZ, quæ porro producta secet ordinatim applicatam XN ad O. Tum sumatur KL quæ sit æqualis excessui quo XO superat AB, atque LM quæ sit mensura rationis inter $CZ + ZE$ & $CG + GE$ ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus AN conversione circum axem AX, erit ad Circulum semidiametro AB descriptum, ut excessus KM quo KL superat LM, ad semidiametrum illam AB.

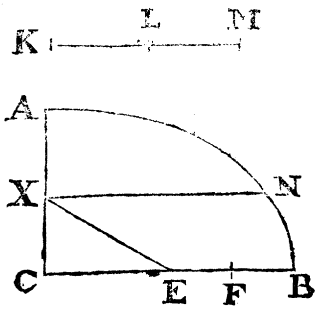
Sit rursus BN Hyperbola descripta vertice B, centro C, foco F, semiaxe principali CB, semiaxe conjugato CA normali ad CB; & ad axis AC punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Hyperbolæ occurrat ad N. In axe CB capiatur CE ad CA ut CA ad CF, & jungatur EX. Tum sumatur KL quæ sit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ rationis inter $EX + XC$ & CE mensura sit ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus BN conversione circum axem CX, erit ad Circulum semidiametro CB descriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad semidiametrum illam CB.



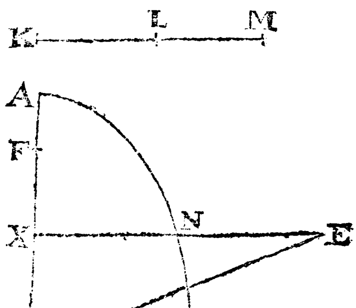
His addere licebit ab Ellipsi genitas superficies. Sit ANB Ellipsis descripta centro C, verticibus A & B, foco F, semiaxe principali CB, semiaxe conjugato CA; & ad axis CA punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Ellipsi occurrat ad N. In axe CB capiatur CE ad CA ut CA ad CF, & jungatur EX. Tum sumatur KL quæ sit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ rationis inter $EX + XC$ & CE mensura sit ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus BN



converſione circum axem CX, erit ad Circulum ſemidiametro CB deſcriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad ſemidiametrum illam CB. Ut hæc ultima conſtructio locum habeat, oportet ſemiaxem CA circa quem converſio facta eſt, minorem eſſe altero ſemiaxe CB; aliter enim Moduli CE quantitas $\frac{CAq}{\sqrt{CBq - CAq}}$ evadet impoſſibilis, & conſtructio illa Logometrica (quod in hujuſmodi caſibus fieri ſolet) convertet ſe in Trigonometricam, qualis illa eſt quæ jam ſequitur.



Sit ANB Ellipſis deſcripta centro C, verticibus A & B, foco F, ſemiaxe principali CA, ſemiaxe conjugato CB; & ad axis CA punctum quodvis X ſit XN ordinatim applicata, quæ Ellipſi occurrat ad N. Angulo CXN inſcribatur recta CE, quæ ſit ad CA ut CA ad CF. Tum ſumatur KL quæ ſit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ anguli XEC menſura ſit ad Modulum CE, hoc eſt, quæ ſit æqualis arcui cujus ſinus eſt XC ad radium CE: & ſuperficies genita ex arcus BN converſione circum axem CX, erit ad Circulum ſemidiametro CB deſcriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad ſemidiametrum illam CB. Poſſet hujus etiam ſuperficiei dimenſio per Logometriam deſignari, ſed modo inexplicabili. Nam ſi quadrantis circuli quilibet arcus, radio CE deſcriptus, ſinum habeat CX ſinumque complementi ad quadrantem XE: ſumendo radium CE pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ & CE menſura ducta in $\sqrt{-1}$. Verum iſthæc aliis, quibus operæ pretium videbitur, diligentius excutienda relinquo. Ceterum ex præcedentibus intelligi poteſt, quanta ſit cognatio inter angulorum atque rationum

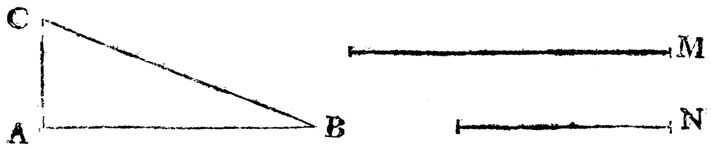


menſu-

menſuras, quamque levi mutatione in ſe invicem faciliime convertantur pro variis ejuſdem Problematis caſibus. De Cubicarum æquationum radicibus dudum ab Analyſtis obſervatum eſt; vel eas exprimi poſſe per *Cardani* regulas, atque adeo per duarum mediarum proportionalium inventionem; vel per diviſionem arcus circularis in tres æquales partes, ſi forte fuerint inexplicabiles per memoratas regulas. * Hoc animadvertit *Carteſius*, ſed & ante *Carteſium* idem obſervavit *Franciſcus Vieta* ſub finem Supplementi Geometriæ. Exhinc autem aperte colligitur, qualis ſit ordo Naturæ tranſeuntis ad Anguli triſectionem à triſectione Rationis.

Mirabilem illam Harmoniam ulterius declarare lubet, Exemplo deſumpto ab eadem Figura circum axes ſuos convoluta. Sit igitur *APBQ* Ellipſis, axis ejus major *AB*, minor *PQ*, centrum *C*, focus *F*. Hæc circum axem utrumvis convoluta Solidum generet, cujus particulæ conſtantes ex materia homogenea, vires attractivas habeant in duplicata diſtantiarum ratione decreſcentes: & quæratur vis qua Solidum illud attrahit corpuſculum quodvis, in ejus ſuper-

* Sublato etenim termino ſecundo, tres habentur Æquationum caſus. Hi vero reſolvuntur ope trianguli rectanguli *ABC*, rectum habentis angulum ad *A*, in quo inſuper triangulo ſemper data ſunt duo latera.



Caſ. 1. Nam ſi ſit $x^3 + 3aax = \pm 2aab$: ponantur $AB = a$, $AC = b$; & ſumantur M & N binæ mediæ proportionales inter $BC + AC$ & $BC - AC$: & erit M — N radix unica poſſibilis affirmativa, ſi habeatur $+ 2aab$; vel N — M radix unica poſſibilis negativa, ſi habeatur $- 2aab$.

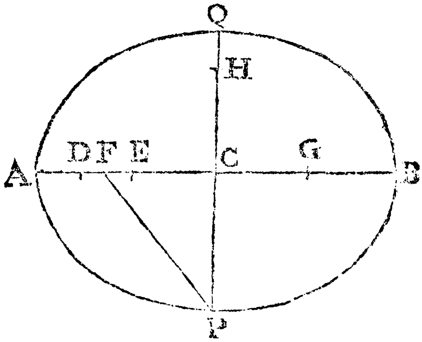
Caſ. 2. Si ſit $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, exiſtente a minore quam b: ponantur $AB = a$, $BC = b$; & ſumantur M & N binæ mediæ proportionales inter $BC + AC$ & $BC - AC$: & erit M + N radix unica poſſibilis affirmativa, ſi habeatur $+ 2aab$; vel — M — N radix unica poſſibilis negativa, ſi habeatur $- 2aab$.

Caſ. 3. Denique ſi ſit $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, exiſtente a majore quam b: ponantur $AB = b$, $BC = a$; & ſumatur M ſinus trientis angulorum ſummæ $A + B$, atque N ſinus trientis angulorum differentiæ $A - B$, exiſtente radio $2BC$: & erunt — M, — N, & M + N tres radices poſſibiles, ſi habeatur $+ 2aab$; vel M, N, & — M — N tres radices poſſibiles, ſi habeatur $- 2aab$.

Atque ita Problemata omnia Solida ſolutionem facilem recipiunt, vel per Canonem Logarithmicum, vel per Canonem Trigonometricum.

ficie

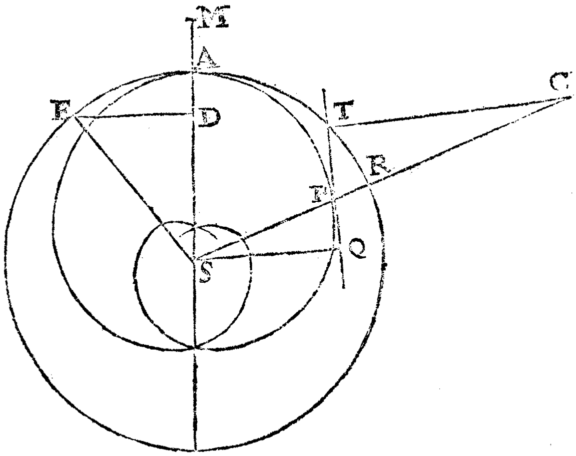
ficie locatum ad axis illius terminum. Jungantur puncta P, F, ac sumatur CD quæ sit mensura rationis inter $PF + FC$ & CP ad Modulum CA, pariterque sumatur CE quæ sit anguli CPF mensura ad Modulum CP; sitque FD excessus mensuræ CD supra CF, atque FE excessus ipsius CF supra mensuram CE: & Solidi convolutione circum axem majorem AB geniti vis in corpusculum ad A locatum, erit ad Sphæræ homogeneæ & eodem axe descriptæ vim in idem corpusculum, ut $3FD \times CPq$ ad $CF\,cub$; Solidi autem conversione circum axem minorem PQ geniti vis in corpusculum ad P locatum, erit ad Sphæræ homogeneæ & eodem axe descriptæ vim in idem corpusculum, ut $3FE \times CAq$ ad $CF\,cub$. Unde cum vis Sphæræ prioris in corpusculum ad A, sit ad vim Sphæræ posterioris in corpusculum ad P, ut CA ad CP: erit vis Solidi prioris in corpusculum ad A, ad vim Solidi posterioris in corpusculum ad P, ut $FD \times CP$ ad $FE \times CA$.



Hinc quoniam Solidum posterius medium est proportionale inter Solidum prius & Sphæram priorem: vis Solidi posterioris in corpusculum ad A, erit media proportionalis quamproxime inter vires Solidi prioris & Sphæræ prioris in idem corpusculum ad A, si modo axes Ellipseos sint prope æquales. Itaque in hoc casu, ponendo CG mediam proportionalem inter CF & $3FD$, & capiendo CH ad $3FE$ ut CA ad CF; posterioris Solidi vires ad A & P, vel ad B & Q, erunt ad invicem quamproxime ut CG ad CH. Id quod non inutile præbet compendium ad inventionem Figuræ Telluris, qualem eam subtiliter instituit celeberrimus *Newtonus*, summus ille Philosophiæ sanioris Instaurator.

Consideratio virium centripetarum aliud porro mihi suggerit Exemplum, in quo satis ampla se prodit mutationum varietas. Proponatur Trajectoriarum species enumerare, in quibus corpora moveri possunt, quæ à viribus centripetis in ratione distantiarum triplicata decrescentibus agitantur, quæque de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediuntur.

Cas. 1. Sit S centrum virium, exeatque corpus de loco P secundum rectam PQ vel QP, ea cum velocitate quam acquirere posset ab iisdem viribus, libere cadendo versus centrum S de loco C, & casu suo describendo altitudinem CP. In datam rectam QPT demittantur perpendicula SQ, CT, centroque S & intervallo $\sqrt{SQq + QTq}$ describatur circulus RTA, rectæ SPC occurrens in R: deinde ad Modulum $\sqrt{SCq - SRq}$ sit arcus RA mensura rationis inter $SR \pm \sqrt{SRq - SPq}$ & SP, jaceant autem arcus ille RA & punctum Q ad diversas partes rectæ SR; & punctum A erit Apsis summa Trajectoriæ. Exhinc vero Trajectoria dabitur, sumendo SM æqualem ipsi $\sqrt{SCq - SRq}$, deinde in recta SA

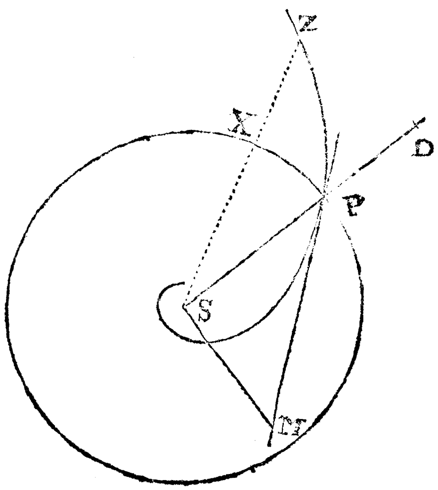


capiendo longitudinem quamvis SD quæ sit minor quam SA, ad eandem erigendo perpendiculum DE secans circulum in E, & jungendo SE. Nam si ad utrasque partes puncti A ponatur arcus circularis AR, cujus longitudo sit mensura rationis inter $SE + ED$ & SD ad Modulum SM, & in semidiametris SR capiantur distantiæ SP æquales ipsi SD: erunt puncta P ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SP, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SAP, erit ut recta DE: nam area percursa æquatur ipsi DE in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ductæ. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus

revolvi

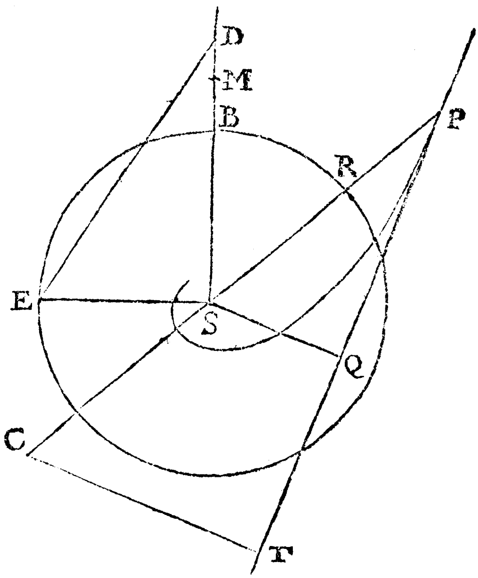
revolvi posset, ut $\sqrt{SCq - SPq}$ ad SC. Ex ipsa constructione patet, hanc Spiralem primam infinitis gyris circa centrum virium contorqueri, quin & seipsam infinitis vicibus decussare, & siti erunt Nodi omnes ad Apsidis lineam AS.

Cas. 2. Recedat punctum C ad infinitam distantiam à centro S; & corporis de loco P secundum rectam PM vel MP exeuntis ea sit velocitas, quam acquirere posset cadendo libere ad eundem locum P ab infinita distantia. Ad rectam SP ducatur normalis SM, quæ secet PM in M; deinde centro S & intervallo SP describatur circulus, & in ejus circumferentia capiatur arcus PX, cujus longitudo sit mensura rationis inter distantiam quamvis SD & distantiam datam SP ad Modulum SM, jaceant autem arcus ille PX & punctum M ad diversas partes rectæ SP si SD fuerit major quam SP, aliter ad easdem, inque semidiametro SX ponatur SZ æqualis ipsi SD; & punctum Z erit ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SZ, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SPZ, erit ut differentia quadratorum ex SZ & SP: Nam area percursa, est ad illam differentiam, in data ratione Moduli dimidiati $\frac{1}{2}SM$ ad SP. Velocitas vero corporis in loco quovis P, æqualis erit velocitati qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus revolvi posset. Ex constructione patet hanc secundam Spiralem esse Æquiangulam illam Propositionis sextæ; ea vero migrabit in Circulum ubi angulus SPM fit rectus.



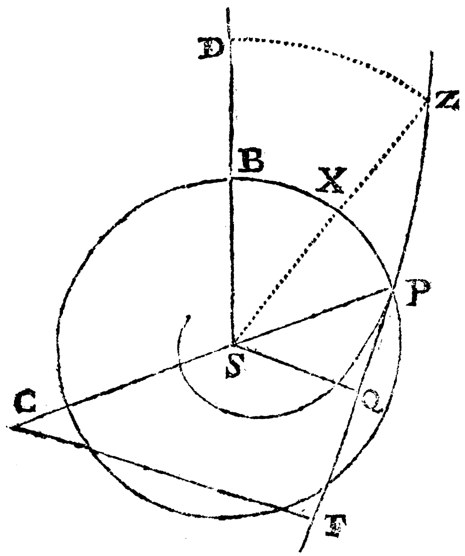
Cas. 3. Ut velocitas sit adhuc major, abeat jam punctum C ad distantiam plusquam infinitam à centro S, vel (quod perinde est) accedat à parte contraria eidem centro, ad finitam distantiam; & corporis de loco P secundum rectam PQ vel QP exeuntis, ea sit velocitas, quam acquirere posset ascendendo libere de loco C ad infinitam distantiam, & deinde ab infinita distantia ex altera centri parte

parte descendendo ad locum P, viribus centripetis inter ascendendum in æquales vires centrifugas conversis. In datam rectam PQT demittantur perpendicula SQ, CT; & erit TQ vel major, vel æqualis, vel minor quam SQ. Si TQ fuerit major quam SQ; centro S & intervallo $\sqrt{TQq - SQq}$ describatur circulus RBE rectæ SP occurrens in R, deinde ad Modulum $\sqrt{SCq - SRq}$ sit arcus RB mensura rationis inter $SR \pm \sqrt{SRq + SPq}$ & SP, jaceant autem arcus ille RB & punctum Q ad partes diversas rectæ SP. Exhinc Trajectoria dabitur, sumendo SM æqualem ipsi $\sqrt{SCq - SRq}$, in recta SB capiendo longitudinem quamvis SD, ad eandem erigendo perpendiculum SE circulum secans in E, & jungendo DE. Nam si retro ponatur à puncto B circularis arcus BR, cujus longitudo mensura sit rationis inter $SE + ED$ & SD ad Modulum SM, & in semidiametro SR capiatur distantia SP æqualis ipsi SD: erit punctum P ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SP, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis hujus Trajectoriæ, erit ut incrementum vel decrementum rectæ DE



per tempus illud factum: nam area percursa æquatur huic incremento vel decremento in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ducto. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus revolvi posset, ut $\sqrt{SCq + SPq}$ ad SC. Ex constructione patet, hanc Spiralem tertiam infinitis gyris centrum cingere infra punctum datum P; at supra idem punctum vel non undique cinget, si arcus RB minor fuerit quam circumferentia tota $RBER$; vel toties cinget, quoties arcus ille circumferentiam excedit.

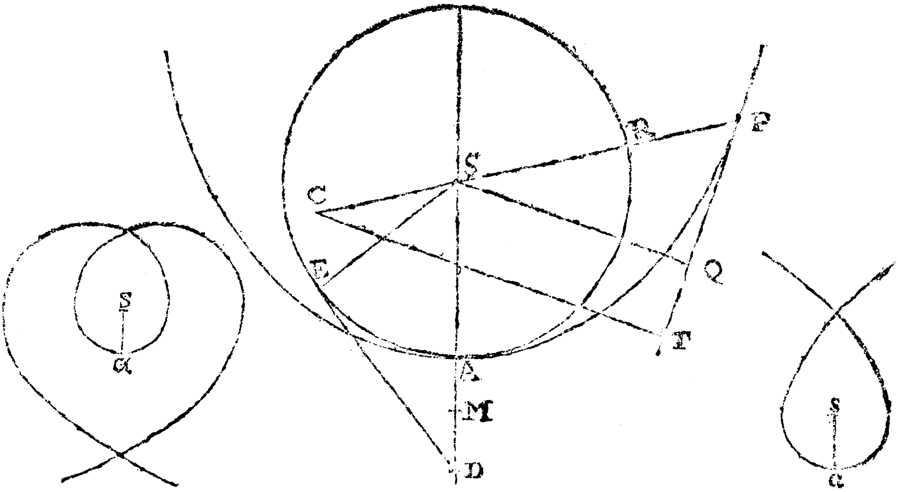
Caſ. 4. Reliquis manentibus, ſint jam TQ & SQ æquales. Centro S & intervallo SP deſcribatur circulus PXB, & ſit arcus PB æqualis ipſi SC, jaceant autem arcus PB & punctum Q ad partes diverſas rectæ SP. Exhinc Trajectoria dabitur, ſumendo in recta SB longitudinem quamvis SD, centroque S & intervallo SD deſcribendo circuli arcum DZ æqualem ipſi SC. Nam ſi ordine circulari contrario ponantur arcus PB à puncto P & arcus DZ à puncto D: erit punctum Z ad Trajectoriam deſcribendam. Tempus autem quo radius SZ, a centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SPZ, erit ut differentia radiorum SZ & SP: nam area percurſa æquatur huic differentiæ ductæ in ſemiſſem diſtantiæ SC. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, cum iiſdem viribus revolvi poſſet, ut $\sqrt{SCq + SPq}$ ad SC. Ex conſtructione patet, hanc Spiralem quartam eſſe Reciprocam illam, cujus longitudinem ſupra dimenſam dedimus.



Caſ. 5. Reliquis adhuc manentibus, ſit jam TQ minor quam SQ. Centro S & intervallo $\sqrt{SQq - TQq}$ deſcribatur circulus RAE rectæ SP occurrens in R; deinde ſit arcus RA, ad ejuſdem circuli arcum cujus ſecans eſt SP, ut $\sqrt{SCq + SRq}$ ad SR; ponatur autem arcus ille RA ad eaſdem partes rectæ SP cum puncto Q: & A erit Apſis ima Trajectoriæ. Exhinc vero Trajectoria dabitur, ſumendo SM æqualem ipſi $\sqrt{SCq + SRq}$, in recta SA capiendo longitudinem quamvis SD quæ ſit major quam SA, ducendo DE quæ circulum tangat in E, & jungendo SE. Nam ſi ad utraſque partes puncti A ponatur arcus circularis AR, cujus longitudo menſura ſit anguli DSE ad Modulum SM, & in ſemidiametris SR capiantur diſtantiæ SP æquales ipſi SD: erunt puncta

R ad

P ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SP, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SAP, erit ut recta DE: nam area percursa æquatur ipsi DE in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ductæ. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus revolvi posset, ut $\sqrt{SCq + SPq}$ ad SC.



Ex constructione patet, hanc quintam Spiralem vel nullum habere Nodum, vel unicum, vel plures, pro varia proportione rectæ SM ad diametrum circuli EAR: toties enim Trajectoria sese decussabit, quoties illa recta diametrum excedit, & Nodi omnes siti erunt ad Apsidis lineam AS.

Sunt itaque Trajectoriarum quinque Species. Harum primam atque ultimam descripsit olim *Newtonus*, per Hyperbolæ & Ellipseos quadraturam.

Geometris integrum erit, ex adductis hactenus Exemplis de Methodo nostra judicare; quam quidem, si proba fuerit, ulterius excolere pergent & excolendo latius promovebunt. Patet utique campus amplissimus in quo vires suas experiri poterunt, præsertim si Logometriæ Trigonometriam insuper adjungant, quibus miram quandam affinitatem in se invicem euntibus intercedere notabam. Hisce quidem Principiis haud facile crediderim generaliora dari posse; cum tota Mathesis vix quicquam in universo suo ambitu complectatur, præter angulorum & rationum Theoriam. Neque sane commodiora sperabit, qui animadverterit Effectionis facilitatem per amplissimas illas, omnibusque suis numeris absolutas, tum Logarithmorum tum Sinuum & Tangentium Tabulas, quas antecessorum nostrorum laudatissimæ solertiæ debemus acceptas. Ut vero tanti beneficii uberior nobis exsurgat fructus, id nunc exponendum restat, quibus artibus ad istiusmodi conclusiones rectissima perveniatur. In hunc finem Theoremata quædam, tum Logometrica tum Trigonometrica adjecissem, quæ parata ad usum asservo; ni consultius visum esset, quum absque nimiis ambagibus ea tradi non possent, intacta potius præterire atque aliis denuo investiganda relinquere. Ceterum isthoc apparatu non semper est opus; nam in Methodo Fluxionum sæpe evenit ut ipsæ Fluentes, omissis hujusmodi subsidiis, ad Logometriam satis commode revocentur: id quod uno atque altero Exemplo ostendam.

Egimus in præcedentibus de rectilineo Gravium descensu, per Medii resistentiam continuam retardato, ex Hypothesi quod illa resistentia esset in duplicata ratione velocitatis. Ex eadem Hypothesi resistentiam corporis penduli, in Cycloide oscillantis, jam sit propositum invenire. Cycloidis itaque in rectam explicatæ sit AC dimidium, C punctum infimum, B punctum à quo cadere incipit corpus pendulum, BC, CD arcus descensu ejus & subsequente ascensu descripti. Hisce positis, exquirenda est ratio quam habet resistentia corporis in loco quovis E, ad pondus ejus relativum in Medio resistente. Exponatur pondus illud per AC; & vis ab eodem oriunda, qua pendulum acceleratur ad E, exponetur per CE: quæ si dicatur x, & momentum ejus $+\dot{x}$; momentum arcus jam descripti BE erit $-\dot{x}$. Exponatur vis resistentiæ per z; & vis qua pendulum vere acceleratur, erit ut excessus vis prioris supra resistentiam, hoc est, ut $x-z$.

Itaque cum resistentia sit ut quadratum velocitatis, resistentiæ momentum $\dot{z}$ erit ut velocitas & velocitatis momentum, hoc est, ut $-\dot{x}$ & $x-z$, sive ut $z\dot{x}-x\dot{x}$. Nam si tempus in particulas æquales dividatur, erit velocitas ut arcus descripti momentum $-\dot{x}$, & velocitatis momentum ut vis acceleratrix $x-z$ quæ momentum illud generat. Quoniam ergo $\dot{z}$ est ut $z\dot{x}-x\dot{x}$, si capiatur quantitas invariabilis a, quæ sit idoneæ magnitudinis: erit $a\dot{z} = z\dot{x} - x\dot{x}$.

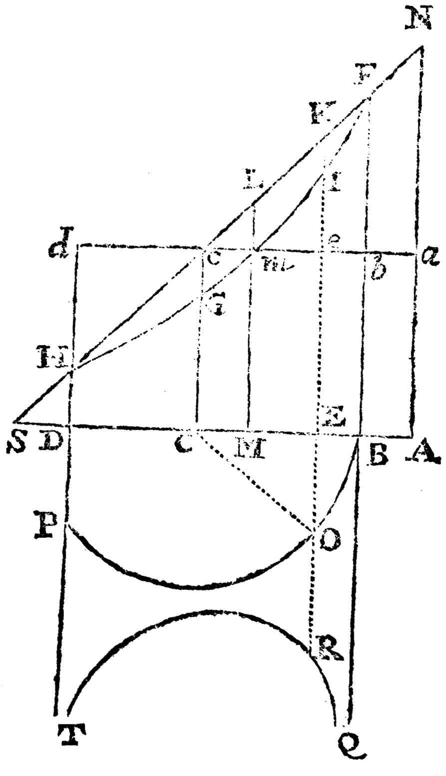
Ad hanc æquationem construendam, assumatur quantitas v quæ sit variabilis, & fingatur æquatio $z = p + qx + rv$, in qua notæ p, q, r designent alias novas quantitates invariabiles; & erit $\dot{z} = q\dot{x} + r\dot{v}$. Hisce porro valoribus ipsarum z & $\dot{z}$ substitutis in æquatione prima $a\dot{z} = z\dot{x} - x\dot{x}$, habebitur $\overline{aq - p},\ \dot{x} + ar\dot{v} = \overline{q - 1},\ x\dot{x} + rv\dot{x}$. Ut hæc æquatio simplicior evadat, ponatur $q - 1 = 0$, & $aq - p = 0$; sive $q = 1$, & $p = a$: & fiet $a\frac{\dot{v}}{v} = \dot{x}$, ac præterea $z = a + x + rv$. Jacentibus punctis D & S ad eandem partem puncti C, intelligatur CS æqualis ipsi a: & erit $z = SE + rv$, atque $CS\frac{\dot{v}}{v} = \dot{x}$. Sit valor quantitatis v, dum incidit punctum E in punctum C: & quantitas x, sive CE, æquabitur mensuræ rationis quam habet v ad c pro Modulo CS, per Propositionem primam: quam æqualitatem sic designare soleo, $CE = CS\left|\frac{v}{c}\right.$. Tota ergo Problematis difficultas jam revocatur ad binas illas æquationes $CE = CS\left|\frac{v}{c}\right.$, atque $z = SE + rv$: hæ vero deduci non poterunt in usum, priusquam determinatæ fuerint quantitates r & CS. Ad hoc efficiendum, duæ restant conditiones nondum adimpletæ; oportet enim resistentiam esse nullam, atque adeo quantitatem z sive $SE + rv$ evanescere, ubi punctum E in puncta B & D inciderit.

Sint ergo b & d valores ipsius v, dum incidit punctum E in puncta B & D respective: & in his casibus habebuntur $SB + rb = 0$, $SD + rd = 0$. Unde $r = -\frac{SB}{b}$, $r = -\frac{SD}{d}$, atque $z = SE + rv = SE - \frac{v}{b}SB = SE - \frac{v}{d}SD$. Porro erit $\frac{SB}{SD} = \frac{b}{d}$; atque adeo $CS\left|\frac{SB}{SD}\right. = (CS\left|\frac{b}{d}\right. = CS\left|\frac{b}{c}\right. - CS\left|\frac{d}{c}\right. = CB + CD =)\ BD$: unde dabitur punctum S.

Componetur itaque Problema hunc in modum. Producatur BD versus D ad S, eo usque, donec BD fuerit mensura rationis inter SB & SD ad Modulum CS. Deinde ad arbitrium posita quantitate c, ita capiantur quantitates b & v, ut eodem Modulo CS, fiat CB mensura rationis quam habet b ad c, fiat quoque CE mensura rationis quam habet v ad c: & erit vis resistentiæ in loco E, ad pondus relativum corporis penduli, ut $SE - \frac{v}{b}SB$, ad CA.

Hujus

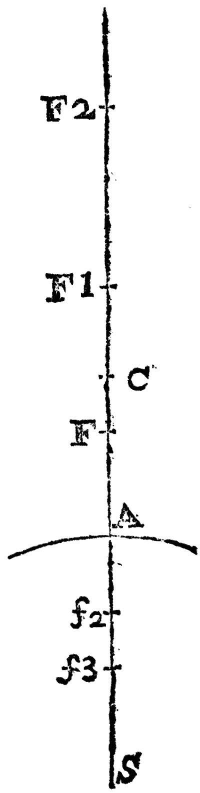
Hujus Problematis solutio utilitatem habet in Physica non contemnendam: quapropter constructionem ejusdem Linearem, ex eadem Analysi deductam, subjungere visum est. Invento uti supra puncto S, ad rectam SA erigantur perpendicula DH, Cc, EK, BF, AN, rectæ SN utcunque per S ductæ occurrentia in H, c, K, F, N. Per punctum c ducatur recta da parallela rectæ DA, quæ iisdem perpendiculis occurrat in d, c, e, b, a; & ad Asymptoton SA ducatur Logistica $HGIF$, quæ transeat per puncta H & F, secetque perpendicula Cc, EK in G & I, ac parallelam da in m: namque his positis, erit pondus relativum corporis penduli, ad vim illam qua pendulum acceleratur ad punctum E in Medio non resistente, ut aN ad eK; erit autem ad vim resistentiæ in loco E, ut aN ad KI; atque adeo ad vim qua pendulum acceleratur ad punctum E in Medio resistente, ut aN ad eI. Porro, si per punctum m ducatur ad rectam SMA perpendicularis LmM, quæ secet SN in L: erit M locus ubi resistentia fit maxima: atque adeo resistentia illa maxima, erit ad pondus relativum penduli, ut Lm ad Na, hoc est, ut CM ad CA.



Ceterum si ita ducatur recta SN, ut abscindat rectam DH quæ sit dupla ipsius SD, centroque C & intervallo CB describatur Circulus BOP, qui occurrat perpendiculo KE in O: erit penduli in Medio resistente oscillantis velocitas in loco E, ad velocitatem penduli ejusdem ad eundem locum E delati per idem pondus relativum in Medio non resistente, ut media proportionalis inter CS & KI, ad EO.

Adhæc si jungatur CO, & in perpendiculo KE sumatur ER, quæ sit ad CB ut CB ad mediam proportionalem inter Cc & KI; continuoque ductu rectæ ER in basim BE generetur area $BQRE$: erit tempus quo Cycloidis arcus BE describitur in Medio resistente, ad tempus quo idem arcus describeretur in Medio non resistente, ut area illa $BQRE$, ad Circuli sectorem BOC. Pergo nunc ad alia.

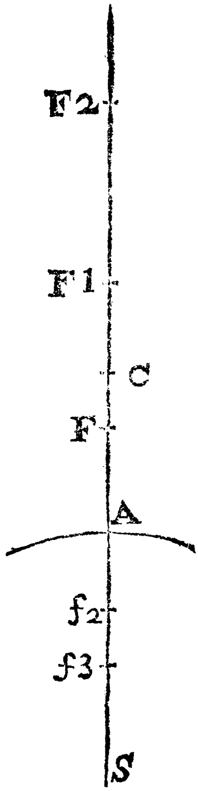
Densitatem Aeris invenimus ad quamvis altitudinem, ubi vis Gravitatis vel erat uniformis, vel decrescebat in recessu à centro telluris in duplicata ratione distantiæ: libet eandem exquirere denuo, ubi gravitatio vel augetur vel diminuitur in ratione datæ cujusvis dignitatis distantiæ. Sit S centrum telluris, A punctum in ejus superficie vel alibi utcunque situm, $SAF2$ recta à centro ad summitatem Atmosphæræ producta: & quærenda sit ratio densitatis in loco A, ad densitatem in loco quovis F, ex Hypothesi quod vis gravitatis in F sit ut distantiæ SF dignitas quæcunque SF^n, cujus index est n. Pro SF scribatur x, ac designent d & v densitates Aeris ad A & F; & cum densitas sit ubique ut pressura totius Aeris incumbentis, erit densitatis momentum ut momentum pressuræ, hoc est, $\dot{v}$ ut $v\dot{x}x^n$, atque adeo $\frac{\dot{v}}{v}$ ut $\dot{x}x^n$. Sit AC altitudo Atmosphæræ, cujus uniformis densitas eadem esset ac densitas loci A, vel sit AC ad altitudinem Hydrargyri barometrici in loco A, ut densitas Hydrargyri ad densitatem Aeris in eodem loco A: & si punctum F accedere intelligatur ad punctum A; erit altitudo Hydrargyri barometrici in loco A, ad altitudinem Hydrargyri barometrici in loco F, ut AC ad FC. Aeris ergo in loco A densitas d, est ad Aeris in loco F densitatem v, ut AC ad FC: unde consequitur ut sit $d-v$ sive $\dot{v}$, ad d sive v, ut AF sive $\dot{x}$, ad AC. Erit itaque, in hoc casu, $AC\frac{\dot{v}}{v}=\dot{x}=\frac{\dot{x}x^n}{SA^n}$. Quoniam ergo, ubicunque sumeretur punctum F, erat $\frac{\dot{v}}{v}$ ut $\dot{x}x^n$: erit porro $AC\frac{\dot{v}}{v}=\frac{\dot{x}x^n}{SA^n}$, ubicunque sumatur punctum F,



Jam

Jam ſi gravitatio ſit reciproce ut diſtantia à centro, ſive ut $\frac{1}{x}$ vel x^{-1}; erit $n=-1$, atque inde $AC\frac{\dot{v}}{v}=SA\frac{\dot{x}}{x}$; unde ſi Fluentes ſtatuantur æquales, menſura rationis inter denſitates d & v ad Modulum AC, æquabitur menſuræ rationis inter diſtantias SF & SA ad Modulum SA.

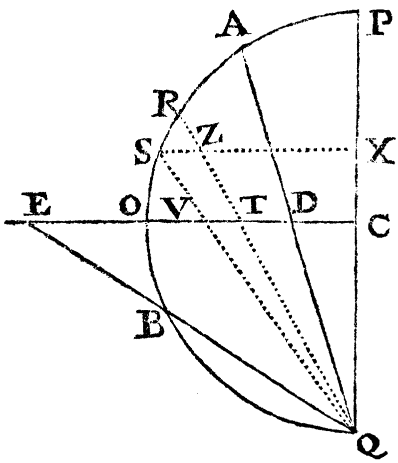
Si gravitationis ſit alia quævis Lex: quoniam eſt $AC\frac{\dot{v}}{v}=\frac{\dot{x}x^n}{SA^n}$; ſi Fluentes ſtatuantur æquales, erit $\frac{1}{n+1}$ in $\frac{SF^{n+1}}{SA^n}-SA$ menſura rationis inter denſitates d & v ad Modulum AC. Itaque ſi ſumantur in progreſſione Geometrica termini creſcentes SA, SF, $SF1$, $SF2$, &c: decreſcentes SF, SA, $Sf2$, $Sf3$, &c: menſura rationis inter denſitates Aeris in A & F ad Modulum AC, erit $\frac{1}{2}Af3$, ſi gravitatio ſit reciproce in triplicata ratione diſtantiæ; erit $Af2$, ſi gravitatio ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ; erit AF, ſi gravitatio uniformis ſtatuatur; erit $\frac{1}{2}AF1$, ſi gravitatio ſit ut diſtantia; erit $\frac{1}{3}AF2$, ſi gravitatio ſit in duplicata ratione diſtantiæ. Et ſic proceditur in infinitum.



Denique ut plenius conſtet, Syntheticas etiam demonſtrationes ex elementis præmiſſis levi negotio concinnari poſſe; ſufficiet unicum inſuper addidiſſe Exemplum, tædet utique plura jam proferre. Repetatur itaque diviſio illa Nautica Meridianæ quam ſupra attigimus, & videamus etiam abſque ope Curvæ cujuſpiam Logometricæ, annon ſimplicior aliquanto ſit futura demonſtratio ad modum ſequentem. Sit $PXCQ$ Telluris axis, CO ſemidiameter Æquatoris, $PAOBQ$ Meridianus; & invenienda ſit in planiſphærio Nautico magnitudo cujuſvis arcus AB. Ad arcus illius terminos A & B ducantur ab alterutro Polorum P vel Q rectæ QA, QB, ſemidiametro CO occurrentes in D & E: Dico magnitudinem Nauticam arcus AB æqualem eſſe menſuræ rationis inter EC & DC ad Modulum OC. Nam diviſus intelligatur arcus AB in parti-

culas

culas quam minimas *RS*, & jungantur *QR*, *QS* quæ ſecent *CO* in *T* & *V*; & demiſſo in axem perpendiculo *SX* quod rectæ *QR* occurrat in *Z*, erit lineola *SZ* æqualis particulæ *RS*. Itaque magnitudo Nautica naſcentis arcus *RS*, erit ad Sphæræ ſemidiametrum *OC*, ut arcus ille *RS* ſive lineola *SZ* ad *SX*, hoc eſt,



ut *VT* ad *VC*. Unde (per Corol. 2. Prop. 1.) magnitudo illa Nautica æquatur menſuræ rationis inter *VC* & *TC* ad Modulum *OC*: & ſimiles utrobique ſummas colligendo, magnitudo Nautica totius arcus *AB* æquabitur menſuræ totius rationis inter *EC* & *DC* ad eundem Modulum *OC*.